TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\pi\sqrt{x}$$

CHUYÊN ĐỀ
PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ BẬC CAO, PHÂN THỨC HỮU TỶ (PHẦN 1)

$\sum E_1F_5$ **QUÂN ĐOÀN BỘ BINH**

CHỦ ĐẠO: NHẬP MÔN DẠNG TOÁN PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO, PHÂN THỨC HỮU TỶ

- **DẠNG TOÁN TRÙNG PHƯƠNG VÀ MỞ RỘNG.**
- **ĐA THỨC BẬC BA NGHIỆM HỮU TỶ.**
- **ĐA THỨC BẬC BA QUY VỀ HẰNG ĐẲNG THỨC.**
- **ĐẶT ẨN PHỤ CƠ BẢN.**
- **ĐẶT HAI ẨN PHỤ QUY VỀ ĐỒNG BẬC.**
- **BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.**

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); XYZ1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA THU 2013

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ BẬC CAO, PHÂN THỨC HỮU TỶ (PHẦN 1)

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Chương trình Đại số lớp 9 THCS đã giới thiệu, đi sâu khai thác các bài toán về phương trình bậc hai, chương trình Đại số 10 THPT đưa chúng ta tiếp cận tam thức bậc hai với các định lý về dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai và ứng dụng. Trong phương trình và bất phương trình đại số nói chung, chúng ta bắt gặp rất nhiều bài toán cps dạng đại số bậc cao, phân thức hữu tỷ, các bài toán có mức độ khó dễ khác nhau, đòi hỏi tư duy linh hoạt và vẻ đẹp cũng rất riêng ! Từ rất lâu rồi, đây vẫn là vấn đề quan trọng, xuất hiện hầu khắp và là công đoạn cuối quyết định trong nhiều bài toán phương trình, hệ phương trình chứa căn, phương trình vi phân, dãy số,...Vì thế về tinh thần, nó vẫn được đông đảo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn này đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình này chúng ta ưu tiên hạ hoặc giảm bậc của bài toán gốc, cố gắng đưa về các dạng bậc hai, bậc nhất hoặc các dạng đặc thù (đã được khái quát trước đó). Trong chuyên đề này, chuyên đề đầu tiên của lớp phương trình, bất phương trình, hệ phương trình tác giả chủ yếu đề cập tới các bài toán từ mức độ đơn giản nhất tới phức tạp nhất, dành cho các bạn học sinh bước đầu làm quen, tuy nhiên vẫn đòi hỏi tư duy logic, tỉ mỉ và chính xác. Tài liệu nhỏ được viết theo trình tự kiến thức tăng dần, không đề cập giải phương trình bậc hai, đi sâu giải phương trình bậc ba (dạng đặc biệt với nghiệm hữu tỷ và phân tích hằng đẳng thức), dạng toán trùng phương (bậc 4) và mở rộng với bậc chẵn, các phép đặt ẩn phụ cơ bản và phép đặt hai ẩn phụ quy về đồng bậc, phạm vi kiến thức phù hợp với các bạn học sinh THCS (lớp 8, lớp 9) ôn thi vào lớp 10 THPT, các bạn học sinh THPT thi học sinh giỏi Toán các cấp và luyện thi vào hệ đại học, cao đẳng, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Kỹ thuật nhân, chia đơn thức, đa thức.
2. Nắm vững các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.
3. Nắm vững các phương pháp giải, biện luận phương trình bậc nhất, bậc hai.
4. Sử dụng thành thạo các ký hiệu toán học, logic (ký hiệu hội, tuyển, kéo theo, tương đương).

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $x^4-3x^2+2=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Đặt $x^2=t\ (t\ge 0)$; phương trình đã cho tương đương với

$$t^2-3t+2=0\Leftrightarrow t^2-t-2t+2=0\Leftrightarrow (t-1)(t-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t-1=0\\ t-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=2\end{array}\right.$$

- Với $t=1\Rightarrow x^2=1\Leftrightarrow |x|=1\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=-1$.
- Với $t=2\Rightarrow x^2=2\Leftrightarrow |x|=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ hoặc $x=-\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{-\sqrt{2};-1;1;\sqrt{2}\right\}$.

Nhận xét.

Bài toán trên là dạng toán phương trình trùng phương quen thuộc, sử dụng đặt ẩn phụ quy về phương trình bậc 2 với ẩn số phụ, tính nghiệm và sử dụng phương pháp nhóm hạng tử để đưa về phương trình về dạng tích của hai phương trình bậc nhất, giải và kết luận nghiệm trở nên dễ dàng.

Bài toán 2. Giải phương trình $x^4-5x^2+6=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $x^2=t\ (t\ge 0)$ ta được $t^2-5t+6=0\Leftrightarrow t^2-2t-3t-6=0\Leftrightarrow (t-2)(t-3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2\\ t=3\end{array}\right.$

- Với $t=2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow |x|=\sqrt{2}\Leftrightarrow x\in\left\{\sqrt{2};-\sqrt{2}\right\}$.
- Với $t=3\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow |x|=\sqrt{3}\Leftrightarrow x\in\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm $S=\left\{-\sqrt{3};-\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{3}\right\}$.

Bài toán 3. Giải phương trình $2x^4-5x^2+2=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x^2=t\ (t\ge 0)$ ta thu được $2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow (t-2)(2t-1)=0\Leftrightarrow t\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}$.

- Với $t=2\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow |x|=\sqrt{2}\Leftrightarrow x\in\left\{\sqrt{2};-\sqrt{2}\right\}$.
- $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow |x|=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm kể trên.

Bài toán 4. Giải bất phương trình $x^4-5x^2+4\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x^2=t\ (t\ge 0)$ ta thu được

$$\begin{cases}t^2-5t+4\le 0\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(t-1)(t-4)\le 0\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le t\le 4\Leftrightarrow 1\le |x|\le 2\Leftrightarrow \begin{cases}-2\le x\le 2\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1\le x\le 2\\ -2\le x\le -1\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[-2;-1]\cup[1;2]$.

Bài toán 5. Giải bất phương trình $x^4-8x^2-9\ge 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Đặt $x^2=t \ (t\ge 0)$ ta thu được

$$\begin{cases} t^2-8t-9\ge 0 \\ t\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(t+1)(t-9)\ge 0 \\ t\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow t\ge 9 \Leftrightarrow x^2\ge 9 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 3 \\ x\le -3\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge 3\vee x\le -3$.

Bài toán 6. Giải bất phương trình $\dfrac{x^4-2x^2+1}{x-2}\ge 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{(x^2-1)^2}{x-2}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x>2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x>2\end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có nghiệm như trên.

Bài toán 7. Giải phương trình $\dfrac{2x^4-7x^2-4}{x^4+x^2+1}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương đương với

$$2x^4-7x^2-4=0 \Leftrightarrow 2x^4+x^2-8x^2-4=0 \Leftrightarrow (2x^2+1)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x\in\{-2;2\}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 8. Giải phương trình $\dfrac{x^4-15x^2-16}{x^2-5x+4}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-5x+4\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 1; x\ne 4$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^4-15x^2-16=0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2-16)=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x\in\{-4;4\}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=-4$.

Bài toán 9. Giải phương trình $\dfrac{x^4-6x^2+5}{x^4-x+1}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4-x^2+1\ne 0$.

Phương trình đã cho trở thành

$$x^4-6x^2+5=0 \Leftrightarrow x^4-5x^2-x^2+5=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|=1 \\ |x|=\sqrt{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{-1;1;-\sqrt{5};\sqrt{5}\}.$$

So sánh điều kiện, kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Bài toán 10. Giải phương trình $\frac{3x^4-x^2-2}{x^5-2x+3}=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x^5-2x+3\neq 0$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^4-x^2-2=0\Leftrightarrow 3x^4+2x^2-3x^2-2=0\Leftrightarrow (3x^2+2)(x^2-1)=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=-1; x=1$.

Bài toán 11. Giải phương trình $\frac{4x^4+7x^2-2}{2x^7-3x^2+1}=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $2x^7-3x^2+1\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^4+7x^2-2=0\Leftrightarrow 4x^4-x^2+8x^2-2=0\Leftrightarrow (x^2+2)(4x^2-1)=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

Bài toán 12. Giải bất phương trình $\frac{x^4+6x^2-7}{x^4+3x^2+7}\geq 0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Ta có $x^4+3x^2+7>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^4+6x^2-7\geq 0\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+7)\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 1\\ x\leq -1\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\geq 1\vee x\leq -1$.

Bài toán 13. Giải bất phương trình $\frac{x^4+5x^2-6}{3x^6+x^2+9}\geq 0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Nhận xét $3x^6+x^2+9>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^4+5x^2-6\geq 0\Leftrightarrow (x^2+6)(x^2-1)\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 1\\ x\leq -1\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\geq 1\vee x\leq -1$.

Bài toán 14. Giải bất phương trình $\frac{x^4-3x^2+2}{3x^2+1}\leq 0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-3x^2+2\leq 0\Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-2)\leq 0\Leftrightarrow 1\leq x^2\leq 2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 1\vee x\leq -1\\ -\sqrt{2}\leq x\leq \sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sqrt{2}\leq x\leq -1\\ 1\leq x\leq \sqrt{2}\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[-\sqrt{2};-1\right]\cup\left[1;\sqrt{2}\right]$.

Bài toán 15. Giải bất phương trình $\dfrac{4x^4-8x^2+3}{x^4-x+1}\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Nhận xét

$$x^4-x+1=\frac{1}{4}\left(4x^4-4x+4\right)=\frac{1}{4}\left[4x^4-4x^2+1+4x^2-4x+1+2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(2x^2-1\right)^2+\left(2x-1\right)^2+2\right]>0,\forall x\in\mathbb{R}$$

Bất phương trình đã cho trở thành $4x^4-8x^2+3\le 0\Leftrightarrow\left(2x^2-3\right)\left(2x^2-1\right)\le 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x^2\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{\frac{3}{2}}\le x\le-\sqrt{\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{1}{2}}\le x\le\sqrt{\frac{3}{2}}\end{array}\right.$

Kết luận nghiệm $S=\left[-\sqrt{\frac{3}{2}};-\sqrt{\frac{1}{2}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{1}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$.

Bài toán 16. Giải bất phương trình $\dfrac{2x^4-9x^2+7}{2x^2-x+9}\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Nhận xét $2x^2-x+9>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x^4-9x^2+7\le 0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(2x^2-7\right)\le 0\Leftrightarrow 1\le x^2\le\frac{7}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{\frac{7}{2}}\le x\le -1\\ 1\le x\le\sqrt{\frac{7}{2}}\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[-\sqrt{\frac{7}{2}};-1\right]\cup\left[1;\sqrt{\frac{7}{2}}\right]$.

Bài toán 17. Giải bất phương trình $\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^4+x^2+10}\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Nhận xét rằng $x^4+x^2+10>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-10x^2+9\le 0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(x^2-9\right)\le 0\Leftrightarrow 1\le x^2\le 9\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\ge 1\\ x^2\le 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -1\end{array}\right.\\ -3\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\le x\le 3\\ -3\le x\le -1\end{array}\right.$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[-3;-1]\cup[1;3]$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$.
2. $\left(x^2 - 1\right)^2 + 4x^2 = 25$.
3. $\left(x^2 + 1\right)^2 + 3x^4 + x^2 = 11$.
4. $\left(2x^2 + 1\right)^2 + 4x^4 = 13$.
5. $x^4 + 3x^2\left(1 + 3x^2\right) = 13$.
6. $\dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 4x + 2} = 0$.
7. $\dfrac{2x^4 - 5x^2 + 2}{3x^2 - 5x + 6} = 0$.
8. $\dfrac{5x^4 - x^2 - 4}{x^4 + 6x} = 0$.
9. $\dfrac{x^4 + 3x^2 - 4}{3x^8 - 4x + 1} = 0$.
10. $\dfrac{4x^4 - 9x^2 + 5}{2x^7 - 3x + 1} = 0$.
11. $\dfrac{5x^4 + x^2 - 6}{2x^5 + x - 3} = 0$.
12. $\dfrac{x^4 + 8x^2 - 9}{x^5 + 3x - 4} = 0$.
13. $\dfrac{4x^4 - 9x^2 + 5}{x^2 - x + 9} \le 0$.
14. $\dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^4 - x + 4} \ge 0$.
15. $\dfrac{x^4 + 2x^2 + 7}{x^4 + 4x^2 - 5} \le 0$.
16. $\dfrac{4x^4 + x^2 - 5}{2x^2 - x + 10} > 0$.
17. $\dfrac{x^4 + x^2 - 20}{x^4 - 12x + 15} \ge 0$.
18. $\dfrac{4x^4 + 3x^2 - 7}{x^4 - x^2 + 6} < 0$.
19. $\dfrac{x^4 + 7x^2 - 8}{x^5 + x - 5} = 0$.
20. $\dfrac{x^4 + 5x^2 - 6}{x^4 + x^2 - 2x + 1} \ge 0$.
21. $\dfrac{x^4 - 16}{x^2 + x + 1} \le 0$.
22. $\dfrac{x^4 + x^2 - 2}{x^4 - 2x + 3} > 0$.

Bài toán 18. Giải phương trình $x^6-12x^3+11=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^6-11x^3-x^3+11=0 \Leftrightarrow x^3\left(x^3-11\right)-\left(x^3-11\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^3-11\right)\left(x^3-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3=1\\x^3=11\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=\sqrt[3]{11}\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{1;\sqrt[3]{11}\right\}$.

Bài toán 19. Giải phương trình $2x^6+x^3-3=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x^3=t$, phương trình đã cho trở thành

$$2t^2+t-3=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\t=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3=1\\x^3=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 20. Giải phương trình $8x^6-217x^3+27=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $x^3=t$ ta thu được $8t^2-217t+27=0 \Leftrightarrow (8t-1)(t-27)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8t=1\\t=27\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^3=\dfrac{1}{8}\\x^3=27\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\x=3\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{1}{2};3\right\}$.

Bài toán 21. Giải bất phương trình $\dfrac{x^6-3x^3+2}{x^4-x^2+1}\le 0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x^4-x^2+1=\dfrac{1}{4}\left[\left(2x^2-1\right)^2+3\right]>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^6-3x^3+2\le 0 \Leftrightarrow \left(x^3-1\right)\left(x^3-2\right)\le 0 \Leftrightarrow 1\le x^3\le 2 \Leftrightarrow 1\le x\le \sqrt[3]{2}$.

Kết luận tập hợp nghiệm $S=\left[1;\sqrt[3]{2}\right]$.

Bài toán 22. Giải bất phương trình $\dfrac{2x^6-5x^3+2}{x^4-8x+9}<0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x^4-8x+9=x^4-2x^2+1+2\left(x^2-4x+4\right)=\left(x^2-1\right)^2+2(x-2)^2>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho trở thành $2x^6-5x^3+2<0 \Leftrightarrow \left(x^3-2\right)\left(2x^3-1\right)<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<x^3<2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}<x<\sqrt[3]{2}$.

Kết luận nghiệm $S=\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};\sqrt[3]{2}\right]$.

Bài toán 23. Giải bất phương trình $\frac{x^6-7x^3+6}{x^4-2x^2+3}>0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Nhận xét $x^4-2x^2+3=(x^2-1)^2+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$x^6-7x^3+6>0\Leftrightarrow(x^3-1)(x^3-6)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3>6\\x^3<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\sqrt[3]{6}\\x<1\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x>\sqrt[3]{6}\vee x<1$.

Bài toán 24. Giải phương trình $x^8+x^4=2 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^8+2x^4=x^4+2\Leftrightarrow(x^4-1)(x^4+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^4=1\\x^4=-2\end{array}\right.\Rightarrow x^4=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 25. Giải phương trình $2x^8+x^4=3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Đặt $x^4=t\ (t\ge 0)$, ta thu được $\left\{\begin{array}{l}2t^2+t=3\\t\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(t-1)(2t+3)=0\\t>0\end{array}\right.\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x^4=1\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$.
Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 26. Giải bất phương trình $x^8+4x^4-5>0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^8-x^4+5x^4-5>0\Leftrightarrow(x^4+5)(x^4-1)>0\Leftrightarrow x^4>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\x<-1\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x>1\vee x<-1$.

Bài toán 27. Giải bất phương trình $x^8-17x^4+16<0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^8-16x^4-x^4+16<0\Leftrightarrow(x^4-1)(x^4-16)<0\Leftrightarrow 1<x^4<16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<2\\-2<x<-1\end{array}\right.$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S=(-2;-1)\cup(1;2)$.

Bài toán 28. Giải bất phương trình $\frac{2x^8+3x^4-5}{5x^8+1}\ge 0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x^8+3x^4-5\ge 0\Leftrightarrow \left(x^4-1\right)\left(2x^4+5\right)\ge 0\Leftrightarrow x^4\ge 1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1\\ x\le -1\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left(-\infty;-1\right]\cup\left[1;+\infty\right)$.

Bài toán 29. Giải bất phương trình $\dfrac{7x^8+x^4-8}{x^8-x^2+1}\le 0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x^8-x^2+1=\dfrac{4x^8-4x^4+1+4x^4-4x^2+1+2}{4}=\dfrac{\left(2x^4-1\right)^2+\left(2x^2-1\right)^2+2}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình trở thành $7x^8+x^4-8\le 0\Rightarrow \left(x^4-1\right)\left(7x^4+8\right)\le 0\Leftrightarrow x^4\le 1\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[-1;1\right]$.

Bài toán 30. Giải bất phương trình $\dfrac{3x^8+5x^4-8}{x^8-2x^4+2}\le 0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Nhận xét $x^8-2x^4+2=\left(x^4-1\right)^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3x^8+5x^4-8\le 0\Leftrightarrow \left(x^4-1\right)\left(3x^4+8\right)\le 0\Leftrightarrow x^4\le 1\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[-1;1\right]$.

Bài toán 31. Giải phương trình $x^{10}+4x^5-1152=0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^{10}-32x^5+36x^5-1152=0\Leftrightarrow \left(x^5-32\right)\left(x^5+36\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^5=32\\ x^5=-36\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=-\sqrt[5]{36}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 32. Giải phương trình $2x^{10}+3x^5-5=0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $x^5=t$ ta thu được $2t^2+3t-5=0\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(2t+5\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^5=1\\ x^5=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=-\sqrt[5]{\dfrac{5}{2}}\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 33. Giải phương trình $\dfrac{2x^{10}+5x^5-7}{x^5+4x^2+1}=0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x^5+4x^2+1\ne 0$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^{10}+5x^5-7=0 \Leftrightarrow \left(x^5-1\right)\left(2x^5+7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^5=1 \\ x^5=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\sqrt[5]{\dfrac{7}{2}} \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 34. Giải bất phương trình $\dfrac{x^{10}+5x^5-6}{x^4+2x^2}\le 0 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^{10}+5x^5-6\le 0 \Leftrightarrow \left(x^5-1\right)\left(x^5+6\right)\le 0 \Leftrightarrow -6\le x^5\le 1 \Leftrightarrow -\sqrt[5]{6}\le x\le 1.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} -\sqrt[5]{6}\le x\le 1 \\ x\ne 0 \end{cases}$

Bài toán 35. Giải phương trình $x^{12}+6x^6-7=0 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^{12}-x^6+7x^6-7=0 \Leftrightarrow \left(x^6-1\right)\left(x^6+7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^6=1 \\ x^6=-7 \end{array}\right. \Rightarrow x^6=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-1; x=1$.

Bài toán 36. Giải phương trình $x^{14}+9x^7-10=0 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^{14}-x^7+10x^7-10=0 \Leftrightarrow \left(x^7+10\right)\left(x^7-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^7=-10 \\ x^7=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt[7]{10} \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $S=\left\{-\sqrt[7]{10};1\right\}$.

Bài toán 37. Giải bất phương trình $5x^{16}+6x^8\le 11 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$5x^{16}-5x^8+11x^8-11\le 0 \Leftrightarrow \left(x^8-1\right)\left(5x^8+11\right)\le 0 \Leftrightarrow x^8\le 1 \Leftrightarrow x\in\left[-1;1\right].$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $S=\left[-1;1\right]$.

Bài toán 38. Giải bất phương trình $\dfrac{x^{12}+6x^6-7}{x^{12}+5x^6+9}\ge 0 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x^{12}+5x^6+9>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^{12}+6x^6-7\ge 0 \Leftrightarrow \left(x^6-1\right)\left(x^6+7\right)\ge 0 \Leftrightarrow x^6\ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -1 \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left(-\infty;1\right]\cup\left[1;+\infty\right)$.

Bài toán 39. Giải bất phương trình $\dfrac{x^{14}+3x^7-4}{x^{10}+x^5+6}\le 0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x^{10}+x^5+6=\dfrac{\left(2x^5+1\right)^2+23}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^{14}+3x^7-4\le 0\Leftrightarrow\left(x^7-1\right)\left(x^7+4\right)\le 0\Leftrightarrow -4\le x^7\le 1\Leftrightarrow -\sqrt[7]{4}\le x\le 1.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[-\sqrt[7]{4};1\right]$.

Bài toán 40. Giải bất phương trình $\dfrac{x^{16}-2x^8+1}{x^4-16}\ge 0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $|x|\ne 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{\left(x^8-1\right)^2}{x^4-16}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^8-1=0\\x^4-16>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x>2\\x<-2\end{array}\right.$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x=1\vee x>2\vee x<-2$.

Nhận xét.
Các bài toán từ 17 đến 40 là dạng toán cơ bản, hình thức có dạng đặc trưng "trùng phương" $f\left(x\right)=ax^{2n}+bx^n+c$, bậc của đa thức tăng dần, bước đầu có sự xuất hiện của phân thức, định hướng bạn đọc tới các lập luận đánh giá mẫu thức. Cách giải đơn thuần là nhóm nhân tử đưa về phương trình – bất phương trình tích – thương hoặc đặt ẩn phụ $x^n=t$ (kèm theo điều kiện $t\ge 0,\forall n=2k,k\in\mathbb{Z}$) đưa về phương trình – bất phương trình bậc hai, nhẩm nghiệm và đưa về nhân tử tự nhiên. Các bạn lưu ý một số kiến thức cơ bản đối với bất phương trình

$$A^{2n}B^{2n}...XYZ\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=0\\B=0\\XYZ\ge 0\end{array}\right.\quad;A^2\ge k^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A\ge k\\A\le -k\end{array}\right.\quad;A^2\le k^2\Leftrightarrow -k\le A\le k$$

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x^6+7x^3-8=0$.
2. $3x^6+x^3\left(2x^3-1\right)=4$.
3. $4x^6+\left(x^3+1\right)^2=8$.
4. $x^8+6x^4\le 7$.
5. $x^8+\left(x^4+1\right)^2=5$.
6. $5x^6+4x^3>9$.
7. $\dfrac{3x^6+7x^3-10}{x^6-x^3+7}\le 0$.
8. $\dfrac{2x^6+7x^3-9}{x^5-x+7}=0$.
9. $\dfrac{5x^6+x^3-6}{3x^7-4x^2+2}=0$.
10. $\dfrac{3x^6+7x^3-10}{x^4-x}\le 0$.
11. $\dfrac{x^8+5x^4-6}{x^8-x+4}=0$.
12. $\dfrac{2x^8+5x^4-7}{x^4-x+5}>0$.
13. $\dfrac{3x^8+4x^4-7}{x^3-5x}\le 0$.
14. $x^8+7x^4-8\ge 0$.
15. $\dfrac{5x^8+x^4-6}{x^5-x+10}=0$.
16. $\dfrac{x^{10}+x^5-2}{x^4-x^2+1}<0$.
17. $\dfrac{3x^{10}+2x^5-5}{x^{10}-2x^5+7}>0$.
18. $\dfrac{x^{12}-4x^6+3}{4x^2-x+3}=0$.
19. $\dfrac{x^{10}-6x^5+5}{x^8-x^2+2}<0$.
20. $2x^{10}-7x^5+5>0$.
21. $2x^{12}-13x^6+11\le 0$.
22. $x^{14}+8x^7-9\le 0$.
23. $x^{16}+7x^8-8>0$.
24. $\dfrac{x^{16}+10x^8-11}{x^3-1}>0$.
25. $\dfrac{x^{14}-9x^7+8}{2x^2-4x+9}\le 0$.

Bài toán 41. Giải phương trình $x^3-6x^2+3x+2=0 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-x^2-5x^2+5x-2x+2=0 \Leftrightarrow x^2\left(x-1\right)-5x\left(x-1\right)-2\left(x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-5x-2\right)\left(x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^2-5x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1; x=\frac{5+\sqrt{33}}{2}; x=\frac{5-\sqrt{33}}{2}$$

Vậy phương trình ban đầu có ba nghiệm.

Bài toán 42. Giải phương trình $x^3+x^2+x-3=0 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-x^2+2x^2-2x+3x-3=0 \Leftrightarrow x^2\left(x-1\right)+2x\left(x-1\right)+3\left(x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+2x+3\right)\left(x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x+1\right)^2=-2 \\ x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 43. Giải phương trình $2x^3+x^2+3x-6=0 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3-2x^2+3x^2-3x+6x-6=0 \Leftrightarrow 2x^2\left(x-1\right)+3x\left(x-1\right)+6\left(x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2+3x+6\right)\left(x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+3x+6=0 \quad [*] \\ x=1 \end{array}\right.$$

Phương trình [*] vô nghiệm do $\Delta<0$. Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét.

Các bài toán từ 41 đến 43 là phương trình bậc ba với hệ số nguyên, giải bằng cách đưa về phương trình tích. Điểm nhấn của cách làm này là tìm ra một nghiệm nguyên hoặc hữu tỷ của phương trình ban đầu. Vấn đề đặt ra là làm cách nào để tìm nghiệm hữu tỷ này và thao tác đưa về dạng tích sẽ thực hiện như thế nào ?

Phương trình bậc ba (hệ số nguyên) dạng tổng quát: $ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad \left(a\neq 0\right)$.

- *Nếu phương trình trên có nghiệm nguyên* x_0 *thì* $x_0\,|\,d$ *, tức là* x_0 *là ước của số hạng tự do d.*
- *Nếu phương trình trên có nghiệm hữu tỷ* $x_0=\dfrac{p}{q}$ *với* $\left(p,q\right)=1$*, tức là p va q nguyên tố cùng nhau, thì p là ước của số dạng tự do d, còn q là ước của hệ số bậc cao nhất a:* $p\,|\,d, q\,|\,a$.

Dựa trên cơ sở hai hệ quả trên, các bạn có thể nhẩm nghiệm trong phạm vi cho phép. Bất quá có thể nhẩm nghiệm từ số 0 tăng và giảm dần về hai phía trục số hữu tỷ.

Lưu ý đối với phương trình đa thức bậc cao bất kỳ, nếu tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức có nghiệm $x=1$*, nói cách khác phương trình tích đưa về có chứa nhân tử* $x-1$.

Bài toán 44. Giải phương trình $x^3+4x-5=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-x^2+x^2-x+5x-5=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)+x(x-1)+5(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x+5)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+5=0 \qquad [*] \\ x=1 \end{array}\right.$$

Phương trình [*] vô nghiệm do $\Delta<0$. Kết luận nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 45. Giải phương trình $3x^3+7x^2-10=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^3-3x^2+10x^2-10x+10x-10=0 \Leftrightarrow 3x^2(x-1)+10x(x-1)+10(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (3x^2+10x+10)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+10x+10=0 \qquad (*) \\ x=1 \end{array}\right.$$

Phương trình (*) vô nghiệm do $\Delta<0$. Kết luận nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 46. Giải phương trình $4x^3+5x-9=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^3-4x^2+4x^2-4x+9x-9=0 \Leftrightarrow 4x^2(x-1)+4x(x-1)+9(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2+4x+9)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2x+1)^2=-8 \\ x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $S=\{1\}$.

Bài toán 47. Giải phương trình $2x^3+4x^2+5x=11 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3-2x^2+6x^2-6x+11x-11=0 \Leftrightarrow 2x^2(x-1)+6x(x-1)+11(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2+6x+11)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+6x+11=0 \qquad [*] \\ x=1 \end{array}\right.$$

Phương trình [*] vô nghiệm do $\Delta<0$. Kết luận nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 48. Giải phương trình $x^3+3x^2+3x-7=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+3x^2+3x+1=8 \Leftrightarrow (x+1)^3=8 \Leftrightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 49. Giải phương trình $x^3+2x^2+7x+6=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + x^2 + x^2 + x + 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) + x(x+1) + 6(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 6)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x + 6 = 0 \quad (*) \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì $\Delta < 0$. Vậy kết luận nghiệm $S = \{-1\}$.

Bài toán 50. Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) + 2x(x+1) + 4(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ (x+1)^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 51. Giải phương trình $2x^3 + 4x^2 + 7x + 5 = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3 + 2x^2 + 2x^2 + 2x + 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(x+1) + 2x(x+1) + 5(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x^2 + 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ (x+1)^2 + x^2 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \{-1\}$.

Bài toán 52. Giải phương trình $3x^3 + x^2 + 8x + 10 = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2 + 3x^2 - 2x^2 - 2x + 10x + 10 = 0 \Leftrightarrow 3x^2(x+1) - 2x(x+1) + 10(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x^2 - 2x + 10) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ 2x^2 + (x-1)^2 = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $S = \{-1\}$.

Bài toán 53. Giải phương trình $4x^3 + 3x^2 + x + 2 = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^3 + 4x^2 - x^2 - x + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x+1) - x(x+1) + 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(4x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(8x^2 - 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ 7x^2 + (x-1)^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1$$

Kết luận nghiệm $x = -1$.

Nhận xét.

Quan sát các bài toán từ 41 đến 53, các bạn có thể thấy ngay đây đều là các phương trình bậc ba cơ bản với hệ số nguyên, nghiệm của phương trình là 1 hoặc -1. Mấu chốt là đoán biết nghiệm của phương trình và áp dụng các kỹ thuật phân tích đa thức thành nhân tử.

Lưu ý khi phương trình đa thức bậc cao có nghiệm 1 hoặc -1 (Kết quả dựa trên định lý Bezu).

- *Nếu tổng các hệ số của đa thức bằng 0 thì phương trình có một nghiệm bằng 1.*
- *Nếu tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì phương trình có một nghiệm bằng -1.*

Về kỹ thuật phân tích đa thức thành nhân tử, các bạn có thể thực hiện theo một trong các phương án sau (xin lấy ví dụ cụ thể bài toán 53).

Trước hết đoán biết phương trình có nghiệm $x=-1$ nên kết quả phân tích chứa nhân tử $x+1$, hay là

$$4x^3+3x^2+x+2=0 \Leftrightarrow (x+1).f(x)=0.$$

- *Thực hiện phép chia đa thức: Ta có $f(x)=\left(4x^3+3x^2+x+2\right):(x+1)=4x^2-x+2$.*

  Thao tác này hoàn toàn cơ bản, đơn giản (phạm vi chương trình Đại số lớp 8 THCS).
- *Sử dụng nhóm nhân tử*

$$4x^3+3x^2+x+2=4x^3+4x^2-x^2-x+2x+2$$
$$=4x^2(x+1)-x(x+1)+2(x+1)=(x+1)\left(4x^2-x+2\right)$$

Thao tác này cũng rất tự nhiên, để xuất hiện nhân tử $x+1$ chắc chắn hạng tử tiếp theo sẽ là $4x^2$, như vậy để xuất hiện $3x^2$ bắt buộc phải bớt đi x^2, tiếp tục để thu được nhân tử $x+1$ bắt buộc phải bớt đi x và tất yếu thêm hạng tử $2x$, kết hợp với số hạng tự do 2 thu được nhân tử đẹp. Sự kiện đoán biết nghiệm $x=-1$ đảm bảo tính chính xác của phương án.

- *Sử dụng lược đồ Horne phân tích nhân tử*

Trước hết xin giới thiệu lược đồ Hocrne, một phương pháp hữu hiệu tìm đa thức thương và đa thức dư trong phép chia đa thức (kể cả trong trường hợp không xảy ra trường hợp trường hợp chia hết).

Xét đa thức bậc n: $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$. Giả sử thực hiện phép chia cho $x-\alpha$, đa thức thương thu được $Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+...+b_{n-1}$. Các hệ số $b_0,b_1,b_2,...,b_{n-1}$ và số dư r được xác định thông qua lược đồ

	a_0	a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n
α	$b_0=a_0$	$b_1=b_0\alpha+a_1$	$b_2=b_1\alpha+a_2$	....	$b_{n-1}=b_{n-2}\alpha+a_{n-1}$	$r=b_{n-1}\alpha+a_n$

Lưu ý:

- *Các hệ số $a_0,a_1,...,a_n$ liệt kê theo thứ tự giảm dần của bậc của x.*
- *Nếu phép chia là hết thì số dư $r=0$.*

Thực hành với đa thức $4x^3+3x^2+x+2$ của chúng ta.

	4	3	1	2
-1	4	-1	2	0

Suy ra $f(x)=4x^2-x+2$ hay ta có phân tích $(x+1)\left(4x^2-x+2\right)$.

Để đảm bảo tính tự nhiên có thể nhân ngược trả lại $x\left(4x^2-x+2\right)+\left(4x^2-x+2\right)=0 \Leftarrow (x+1)\left(4x^2-x+2\right)=0$. Kết quả hoàn toàn tương tự các cách làm khác.

Bài toán 54. Giải phương trình $x^3-9x^2+26x-24=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x\left(x^2-7x+12\right)-2\left(x^2-7x+12\right)=0\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-7x+12\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[x^2-3x-4x-12\right]=0\Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x-4)=0\Leftrightarrow x\in\{2;3;4\}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm.

Bài toán 55. Giải phương trình $x^3-x^2-x-2=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+x^2+x-2x^2-2x-2=0\Leftrightarrow x\left(x^2+x+1\right)-2\left(x^2+x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+x+1\right)=0\Leftrightarrow (x-2)\left(4x^2+4x+4\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ (2x+1)^2=-3 \end{array}\right.\Leftrightarrow x=2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-2x^2+x^2-2x+x-2=0\Leftrightarrow x^2(x-2)+x(x-2)+x-2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+x+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2 & \\ x^2+x+1=0 & (*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì $\Delta<0$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Nhận xét.

Hai bài toán trên, 54 và 55 đã không có nghiệm bằng 1 hoặc -1 nữa, điều này bắt buộc chúng ta phải đoán biết bằng cách nhẩm hoặc sử dụng máy tính. Riêng về bài toán 55, các bạn có thể nhận thấy phương trình có một nghiệm $x=2$, áp dụng phân tích nhân tử tìm được nhân tử còn lại là x^2+x+1, do đó có thể viết trực tiếp dạng

$$(x-2)\left(x^2+x+1\right)=0.$$

Tuy nhiên để lời giải trở nên "tự nhiên, thuần túy" chúng ta nên nhóm nhân tử như một trong hai cách trên

$$\left.\begin{array}{r} x\left(x^2+x+1\right)-2\left(x^2+x+1\right)=0 \\ x^2(x-2)+x(x-2)+x-2=0 \end{array}\right]\Leftarrow (x-2)\left(x^2+x+1\right)=0.$$

Tại vế sau của mỗi lời giải, cách trình bày cũng có hơi khác biệt

Lời giải 1:

$$(x-2)\left(x^2+x+1\right)=0\Leftrightarrow (x-2)\left(4x^2+4x+4\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ (2x+1)^2=-3 \end{array}\right.\Leftrightarrow x=2.$$

Thực ra là $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$, phương trình này vô nghiệm. Việc nhân với 4 để tránh dùng phân số.

Ngoài ra các bạn có thể nhân với 2 đưa về $x^2+(x+1)^2=-1$ (Vô nghiệm).

Lời giải 2.

Lập luận trực tiếp $\Delta<0$ dẫn đến phương trình (*) vô nghiệm.

Lời giải 1 chỉ sử dụng biến đổi hằng đẳng thức thông thường, không sử dụng kiến thức phương trình bậc hai (chương trình Đại số học kỳ II lớp 9 THCS), các bạn học sinh đầu lớp 9 và lớp 8 có thể làm được, lời giải 2 sử dụng biệt thức $\Delta < 0$, rõ ràng chỉ phù hợp với các bạn đã qua học kỳ II lớp 9 trở lên.

Bài toán 56. Giải phương trình $2x^3 - 3x^2 + 3x - 10 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3 + x^2 + 5x - 4x^2 - 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + x + 5) - 2(2x^2 + x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(4x^2 + 2x + 10) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ (x+1)^2 + 3x^2 = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 57. Giải phương trình $x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 8x + 9x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-2) + 4x(x-2) + 9(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 4x + 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ (x+2)^2 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2$$

Kết luận nghiệm $S = \{2\}$.

Bài toán 58. Giải phương trình $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - 5x^2 + 6x + 4x^2 - 20x + 24 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 5x + 6) + 4(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4; 2; 3\}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm.

Bài toán 59. Giải phương trình $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - 5x^2 - 7x^2 + 35x + 12x - 60 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-5) - 7x(x-5) + 12(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x^2 - 7x + 12) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{3; 4; 5\}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 3; x = 4; x = 5$.

Bài toán 60. Giải phương trình $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - 2x^2 + x - 2x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) - 2(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 61. Giải phương trình $x^3-7x^2+16x-12=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-4x^2+4x-3x^2+12x-12=0\Leftrightarrow x\left(x^2-4x+4\right)-3\left(x^2-4x+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2)^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\\ x=4\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm hai nghiệm $x=3;x=4$.

Bài toán 62. Giải phương trình $4x^3-8x^2+5x-1=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^3-4x^2+x-\left(4x^2-4x+1\right)=0\Leftrightarrow x(2x-1)^2-(2x-1)^2=0\Leftrightarrow (x-1)(2x-1)^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1;x=\frac{1}{2}$.

Bài toán 63. Giải phương trình $x^3-8x^2+21x-18=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-6x^2+9x-2x^2+12x-18=0\Leftrightarrow x\left(x^2-6x+9\right)-2\left(x^2-6x+9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3)^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ x=3\end{array}\right.$$

Kết luận tập nghiệm $S=\{2;3\}$.

Bài toán 64. Giải phương trình $x^3-3x^2+3x-1=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x-1)^3=0\Leftrightarrow x=1$. Phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 65. Giải phương trình $x^3+3x^2+3x-7=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-x^2+4x^2-4x+7x-7=0\Leftrightarrow x^2(x-1)+4x(x-1)+7(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+4x+7\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ (x+2)^2=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3+3x^2+3x+1=8\Leftrightarrow (x+1)^3=8\Leftrightarrow x+1=2\Leftrightarrow x=1$.

Kết luận $S=\{1\}$.

Nhận xét.

Các bài toán từ 60 đến 64 đã bước đầu xuất hiện nghiệm bội (hai nghiệm trùng nhau), kết quả sử dụng máy tính cho chúng ta hai nghiệm, tuy nhiên không hiển thị chính xác nghiệm nào là nghiệm bội. Trong trường hợp này có thể dùng các phép phân tích phân tích nhân tử thông thường (chia đa thức, nhóm nhân tử, lược đồ Horne...). Tuy nhiên để giảm bớt các công đoạn tính toán các bạn có thể dự đoán chính xác nghiệm bội, từ đây việc nhóm nhân tử diễn ra dễ dàng hơn. Để cụ thể hóa, xin lấy hai ví dụ điển hình bài toán 62 và 63.

- ***Bài toán 62.*** *Giải phương trình* $4x^3-8x^2+5x-1=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

  Kết quả nghiệm $x_1=1;x_2=0,5$. *Lưu ý đây là phương trình bậc ba nên không thể có* $(x-1)(2x-1)=0$ *(phương trình bậc hai). Các phép phân tích có thể xảy ra là* $\left[\begin{array}{ll}(x-1)^2(2x-1)=0 & [1]\\ (x-1)(2x-1)^2=0 & [2]\end{array}\right.$

  Để ý rằng đối với trường hợp [1], *hệ số bậc cao nhất sau khi khai triển là* $1.1=1\neq 4$ *(Loại); trường hợp* [2] *dễ thấy thỏa mãn. Trong cả hai trường hợp, số hạng tự do đều là* -1.

- ***Bài toán 63.*** *Giải phương trình* $x^3-8x^2+21x-18=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

  Kết quả nghiệm $x_1=2;x_2=3$. *Loại trừ ngay trường hợp* $(x-2)(x-3)=0$ *(phương trình bậc hai).*

  Các phép phân tích có thể xảy ra gồm $\left[\begin{array}{ll}(x-2)^2(x-3)=0 & [3]\\ (x-3)^2(x-2)=0 & [4]\end{array}\right.$

  Dễ thấy đối với phương án [3], *số hạng tự do bằng* $4.3=12\neq -18$, *tất yếu phương án* [4] *là phù hợp, từ đó dẫn đến lời giải chính xác.*

Bài toán 66. Giải bất phương trình $x^3-4x^2+3x\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x\left(x^2-4x+3\right)\le 0\Leftrightarrow x(x-1)(x-3)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\le x\le 3\\ x\le 0\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(-\infty;0]\cup[1;3]$.

Bài toán 67. Giải bất phương trình $x^3-6x^2+11x-6\ge 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-2x^2-4x^2+8x+3x-6\ge 0\Leftrightarrow x^2(x-2)-4x(x-2)+3(x-2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2-4x+3\right)\ge 0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)(x-3)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ 1\le x\le 2\end{array}\right.$$

Kết luận tập nghiệm $S=[1;2]\cup[3;+\infty)$.

Bài toán 68. Giải bất phương trình $x^2+2x+3-\dfrac{6}{x}\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3+2x^2+3x-6}{x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-x^2+3x^2-3x+6x-6}{x}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)+3x(x-1)+6(x-1)}{x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+3x+6)}{x}\le 0 \qquad [*]$$

Ta có $x^2+3x+6=\frac{1}{2}(2x^2+6x+12)=\frac{1}{2}\left[x^2+(x+3)^2+3\right]>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $[*]\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\le 0\Leftrightarrow 0<x\le 1$.

Kết luận tập nghiệm $S=(0;1]$.

Bài toán 69. Giải bất phương trình $2x+1-\frac{3}{x^2}\ge 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3+x^2-3\ge 0\Leftrightarrow 2x^3-2x^2+3x^2-3\ge 0\Leftrightarrow 2x^2(x-1)+3(x^2-1)\ge 0\Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x+3)\ge 0 \quad (*).$$

Ta có $2x^2+3x+3=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $(*)\Leftrightarrow x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge 1$.

Bài toán 70. Giải bất phương trình $x^3-7x^2+15x\le 9 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-6x^2+9x-x^2+6x-9\le 0\Leftrightarrow x(x^2-6x+9)-(x^2-6x+9)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)^2\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=0\\x-1\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x\le 1\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=(-\infty;1]\cup\{1\}$.

Bài toán 71. Giải bất phương trình $x^3-7x^2+11x-5\ge 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-2x^2+x-5x^2+10x-5\ge 0\Leftrightarrow x(x^2-2x+1)-5(x^2-2x+1)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=0\\x-5\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x\ge 5\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\{1\}\cup[5;+\infty)$.

Bài toán 72. Giải bất phương trình $2x^3-9x^2+12x-4\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3-8x^2+8x-x^2+4x-4\le 0\Leftrightarrow 2x(x^2-4x+4)-(x^2-4x+4)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x-2)^2\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1\le 0\\x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le \frac{1}{2}\\x=2\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\{2\}$.

Bài toán 73. Giải bất phương trình $4x^3-12x^2+9x-2\ge 0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^3-4x^2+x-8x^2+8x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\left(4x^2-4x+1\right)-2\left(4x^2-4x+1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x-1)^2\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2\ge 0\\ 2x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[2;+\infty)$.

Bài toán 74. Giải bất phương trình $9x^3-15x^2+7x-1\le 0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$9x^3-6x^2+x-9x^2+6x-1\le 0 \Leftrightarrow x\left(9x^2-6x+1\right)-\left(9x^2-6x+1\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x-1)^2\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1\le 0\\ 3x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 1\\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\le 1$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\le 1$.

Bài toán 75. Giải bất phương trình $x^3-6x^2+9x-4\le 0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-2x^2+x-4x^2+8x-4\le 0 \Leftrightarrow x\left(x^2-2x+1\right)-4\left(x^2-2x+1\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-1)^2\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4\le 0\\ x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 4\\ x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow x\le 4$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x\le 4$.

Bài toán 76. Giải bất phương trình $x^2+x+1-\frac{3}{x}\le 0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3+x^2+x-3}{x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-x^2+2x^2-2x+3x-3}{x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}{x}\le 0 \qquad [*]$$

Nhận xét $x^2+2x+3=(1+x)^2+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó $[*]\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\le 0\Leftrightarrow 0<x\le 1$. Kết luận $S=(0;1]$.

Bài toán 77. Giải bất phương trình $x^2-2x+3+\frac{6}{x-4}<0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\left(x^2-2x+3\right)\left(x-4\right)+6}{x-4}<0 \Leftrightarrow \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-4}<0 \Leftrightarrow \frac{x\left(x^2-4x+3\right)-2\left(x^2-4x+3\right)}{x-4}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-2\right)\left(x^2-4x+3\right)}{x-4}<0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{x-4}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1<x<2\\3<x<4\end{array}\right.$$

Kết luận nghiệm $1<x<2 \vee 3<x<4$.

Bài toán 78. Giải bất phương trình $x^2+4x+9+\frac{14}{x-2}<0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\left(x^2+4x+9\right)\left(x-2\right)+14}{x-2}<0 \Leftrightarrow \frac{x^3+2x^2+x-4}{x-2}<0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-1\right)\left(x^2+3x+4\right)}{x-2}<0 \quad [*]$$

Ta có $x^2+3x+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $[*]\Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2}<0 \Leftrightarrow 1<x<2$. Kết luận nghiệm $S=\left(1;2\right)$.

Bài toán 79. Giải bất phương trình $x^2-3x+4+\frac{4}{x-4}\geq 0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\left(x^2-3x+4\right)\left(x-4\right)+4}{x-4}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-7x^2+16x-12}{x-4}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3-4x^2+4x-3x^2+12x-12}{x-4}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\left(x^2-4x+4\right)-3\left(x^2-4x+4\right)}{x-4}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-3\right)\left(x-2\right)^2}{x-4}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=0\\ \frac{x-3}{x-4}\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x>4\\x\leq 3\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left(-\infty;3\right]\cup\left\{2\right\}\cup\left(4;+\infty\right)$.

Bài toán 80. Giải bất phương trình $2x^2+x+7+\frac{20}{x-3}<0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 3$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\left(2x^2+x+7\right)\left(x-3\right)+20}{x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-5x^2+4x-1}{x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-4x^2+2x-x^2+2x-1}{x-3}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x\left(x^2-2x+1\right)-\left(x^2-2x+1\right)}{x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{\left(2x-1\right)\left(x-1\right)^2}{x-3}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=0\\ \frac{2x-1}{x-3}<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \frac{1}{2}<x<3\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<3$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left(\frac{1}{2};3\right)$.

Bài toán 81. Giải bất phương trình $4x^2+5+\frac{9}{x-2}\geq 0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 2$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\left(4x^2+5\right)\left(x-2\right)+9}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow \frac{4x^3-8x^2+5x-1}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow \frac{4x^3-4x^2+x-4x^2+4x-1}{x-2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\left(4x^2-4x+1\right)-\left(4x^2-4x+1\right)}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow \frac{\left(x-1\right)\left(2x-1\right)^2}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ \dfrac{x-1}{x-2}\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x>2\vee x\leq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\ x\leq 1\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x>2\vee x\leq 1$.

Bài toán 82. Giải bất phương trình $\dfrac{x^3+4x^2+3x-8}{x^2-x+19}\leq 0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x^2-x+19=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{75}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+4x^2+3x-8\leq 0\Leftrightarrow x^3-x^2+5x^2-5x+8x-8\leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x-1\right)+5x\left(x-1\right)+8\left(x-1\right)\leq 0\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2+5x+8\right)\leq 0 \qquad (*)$$

Ta có $x^2+5x+8=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $(*)\Leftrightarrow x-1\leq 0\Leftrightarrow x\leq 1$. Kết luận nghiệm $x\leq 1$.

Bài toán 83. Giải bất phương trình $\dfrac{x^3+4x^2+5x-10}{x^2+5}\leq 0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-x+5x^2-5x+10x-10\leq 0\Leftrightarrow x^2\left(x-1\right)+5x\left(x-1\right)+10\left(x-1\right)\leq 0\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(x^2+5x+10\right)\leq 0 \qquad (1).$$

Nhận xét $x^2+5x+10=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $(1)\Leftrightarrow x-1\leq 0\Leftrightarrow x\leq 1$. Kết luận nghiệm $x\leq 1$.

Bài toán 84. Giải bất phương trình $\dfrac{x^3+2x^2+x-18}{x^4-x+1}\leq 0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Nhận xét $x^4-x+1=x^4-x^2+\dfrac{1}{4}+x^2-x+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+2x^2+x-18\leq 0\Leftrightarrow x^3-2x^2+4x^2-8x+9x-18\leq 0\Leftrightarrow x^2\left(x-2\right)+4x\left(x-2\right)+9\left(x-2\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2+4x+9\right)\leq 0\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left[\left(x+2\right)^2+5\right]\leq 0\Leftrightarrow x-2\leq 0\Leftrightarrow x\leq 2$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x\leq 2$.

Bài toán 85. Giải bất phương trình $\dfrac{x^3+x^2+x-39}{4x^2-2x+1}\leq 0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Nhận xét $4x^2-2x+1=3x^2+\left(x-1\right)^2>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho trở thành

$$x^3-3x^2+4x^2-12x+13x-39\le 0 \Leftrightarrow x^2(x-3)+4x(x-3)+13(x-3)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+4x+13)\le 0 \Leftrightarrow (x-3)\left[(x+2)^2+9\right]\le 0 \Leftrightarrow x\le 3$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\le 3$.

Bài toán 86. Giải phương trình $\dfrac{x^3-7x^2+11x-5}{x^7+2x-6}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x^7+2x\ne 6$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-2x^2+x-5x^2+10x-5=0 \Leftrightarrow x(x^2-2x+1)-5(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $S=\{1;5\}$.

Bài toán 87. Giải phương trình $\dfrac{2x^3-11x^2+20x-12}{29x^6-3x+1992}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $29x^6-3x+1992\ne 0$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3-8x^2+8x-3x^2+12x-12=0 \Leftrightarrow 2x(x^2-4x+4)-3(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow (2x-3)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

So sánh điều kiện thấy thỏa mãn, kết luận phương trình đã cho có nghiệm $S=\left\{2;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Bài toán 88. Giải phương trình $\dfrac{3x^3+x^2+4x-8}{2x^5-9x^2+1945}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $2x^5-9x^2+1945\ne 0$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^3-3x^2+4x^2-4x+8x-8=0 \Leftrightarrow 3x^2(x-1)+4x(x-1)+8(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (3x^2+4x+8)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+(x+2)^2=-4 \\ x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=1$.

Bài toán 89. Giải bất phương trình $\dfrac{x^3+3x^2+5x-9}{x^2-5x+6}<0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\ne 2; x\ne 3$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3-x^2+4x^2-4x+9x-9}{x^2-2x-3x-6}<0 \Leftrightarrow \frac{(x^2+4x+9)(x-1)}{(x-2)(x-3)}<0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<3 \\ x<1 \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(-\infty;1)\cup(2;3)$.

Bài toán 90. Giải bất phương trình $\dfrac{x^3+x-2}{x^2-7x+12}\ge 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-7x+12\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 3; x\ne 4$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3-x^2+x^2-x+2x-2}{x^2-3x-4x+12}\ge 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-3)(x-4)}\ge 0\Leftrightarrow\frac{x-1}{(x-3)(x-4)}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\1\le x<3\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[1;3)\cup(4;+\infty)$.

Bài toán 91. Giải bất phương trình $\dfrac{x^3+x^2+2x-4}{x^3+x-10}\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3-x^2+2x^2-2x+4x-4}{x^3-2x^2+2x^2-4x+5x-10}\le 0\Leftrightarrow\frac{x^2(x-1)+2x(x-1)+4(x-1)}{x^2(x-2)+2x(x-2)+5(x-2)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+5)}\le 0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x-2}\le 0\Leftrightarrow 1\le x<2$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[1;2)$.

Bài toán 92. Giải bất phương trình $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-8x+15}\ge 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 3; x\ne 5$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3-4x^2+4x-x^2+4x-4}{x^2-3x-5x-15}\ge 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)(x-5)}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\\dfrac{x-1}{(x-3)(x-5)}\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x>5\\1\le x<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>5\\1\le x<3\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[1;3)\cup(5;+\infty)$.

Bài toán 93. Giải bất phương trình $\dfrac{x^3-7x^2+15x-9}{x^3-11x^2+38x-40}\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne 2; x\ne 4; x\ne 5$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3-6x^2+9x-x^2+6x-9}{x^3-6x^2+8x-5x^2+30x-40}\le 0\Leftrightarrow\frac{x(x^2-6x+9)-(x^2-6x+9)}{x(x^2-6x+8)-5(x^2-6x+8)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x-3)^2}{(x-2)(x-4)(x-5)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3=0\\\dfrac{x-1}{(x-2)(x-4)(x-5)}\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\4<x<5\\1\le x<2\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[1;2)\cup\{3\}\cup(4;5)$.

Bài toán 94. Giải bất phương trình $\frac{2x^3-14x^2+24x-9}{x^3-7x^2+14x-8}>0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 1; x\neq 2; x\neq 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^3-12x^2+18x-x^2+6x-9}{x^3-3x^2+2x-4x^2+12x-8}>0 \Leftrightarrow \frac{2x\left(x^2-6x+9\right)-\left(x^2-6x+9\right)}{x\left(x^2-3x+2\right)-4\left(x^2-3x+2\right)}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x-3)^2}{(x-4)(x-1)(x-2)}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\neq 0 \\ \dfrac{2x-1}{(x-4)(x-1)(x-2)}>0 \end{cases} \begin{cases} x\neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x>4 \\ 1<x<2 \\ 2x<1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{1}{2} \\ 1<x<2 \\ x>4 \end{array}\right.$$

Kết luận nghiệm như trên.

Bài toán 95. Giải bất phương trình $\frac{4x^3+x^2+8x-13}{x^2-13x+42}\leq 0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\notin\{6;7\}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x\left(4x^2+5x+13\right)-\left(4x^2+5x+13\right)}{(x-6)(x-7)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(4x2+5x+13)}{(x-6)(x-7)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{(x-6)(x-7)}\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ 6<x<7 \end{array}\right.$$

Kết luận nghiệm $S=(-\infty;0]\cup(6;7)$.

Bài toán 96. Giải bất phương trình $\frac{2x^3+3x^2+5x-10}{x^2-9x}>0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\notin\{0;9\}$. Bất phương trình đã cho tương đương

$$\frac{x\left(2x^2+5x+10\right)-\left(2x^2+5x+10\right)}{x(x-9)}>0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)\left(2x^2+5x+10\right)}{x(x-9)}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x(x-9)}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>9 \\ 0<x<1 \end{array}\right.$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S=(0;1)\cup[9;+\infty)$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $5x^3 - 9x^2 + 8x - 4 = 0$.
2. $x^3 + 6x^2 + x = 8$.
3. $x^3 + 4x^2 + 2x - 7 > 0$.
4. $4x^3 + x^2 - 10x = 16$.
5. $x^3 + 3x^2 + 2x < 24$.
6. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + x - 4}{x - 5} \le 0$.
7. $\dfrac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{2x - 5} \le 0$.
8. $x^2 + 5x + 15 + \dfrac{21}{x - 2} > 0$.
9. $2x^2 + 7x + 28 + \dfrac{76}{x - 3} \ge 0$.
10. $x^2 + 3x + 5 - \dfrac{9}{x} = 0$.
11. $\dfrac{x^3 + 2x - 12}{x^2 - 2x + 9} > 0$.
12. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 8x - 12}{x^2 - 8x} > 0$.
13. $\dfrac{x^3 + 3x - 14}{x^2 - 9x} \le 0$.
14. $\dfrac{x^3 + x^2 + 2x - 16}{x^2 - x} < 0$.
15. $\dfrac{3x^3 - x^2 + x - 22}{3x^2 - 4x} \ge 0$.
16. $\dfrac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 - 10x + 9} \le 0$.
17. $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 5}{11x^5 - 6x^2 + 1963} = 0$.
18. $\dfrac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{4x^5 - 10x^2 + 2013} = 0$.
19. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 7x - 11}{28x^7 - 5x^6 + 1911} = 0$.
20. $\dfrac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{x^3 - 27} \le 0$.
21. $\dfrac{x^3 - 11x^2 + 19x - 9}{x^4 - x + 1} > 0$.
22. $\dfrac{3x^3 - 20x^2 + 39x - 18}{x^3 - x} \ge 0$.
23. $\dfrac{8x^3 - 28x^2 + 22x - 5}{x^4 - 12x + 15} < 0$.

Bài toán 97. Giải phương trình $3x^3+3x^2+3x+1=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3+x^3+3x^2+3x+1=0\Leftrightarrow (x+1)^3=-2x^3\Leftrightarrow x+1=-\sqrt[3]{2}x\Leftrightarrow x=-\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

Bài toán 98. Giải phương trình $x^3-3x^2+3x=28 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-4x^2-x^2+4x+8x-28=0\Leftrightarrow x^2(x-4)-x(x-4)+8(x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-x+8)=0\Leftrightarrow (x-4)(2x^2-2x+16)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x^2+(x-1)^2=-15\end{array}\right.\Leftrightarrow x=4$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-3x^2+3x-1=27\Leftrightarrow (x-1)^3=3^3\Leftrightarrow x-1=3\Leftrightarrow x=4.$$

Kết luận nghiệm $S=\{4\}$.

Bài toán 99. Giải phương trình $x^3+3x^2+3x+3=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+3x^2+3x+1=-2\Leftrightarrow (x+1)^3=-2\Leftrightarrow x+1=-\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{2}-1.$$

Kết luận nghiệm duy nhất $x=-\sqrt[3]{2}-1$.

Bài toán 100. Giải phương trình $8x^3-12x^2+6x=7 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3-12x^2+6x-1=6\Leftrightarrow (2x-1)^3=6\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{6}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{6}+1}{2}.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{\sqrt[3]{6}+1}{2}$.

Bài toán 101. Giải phương trình $x^3-9x^2+27x-38=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-9x^2+27x-27=11\Leftrightarrow (x-3)^3=11\Leftrightarrow x-3=\sqrt[3]{11}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{11}+3.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\sqrt[3]{11}+3$.

Nhận xét.

Có thể dễ nhận thấy các phương trình từ 97 đến 101 đều là các phương trình bậc ba đầy đủ, tuy nhiên một số phương trình sử dụng máy tính cho kết quả tỏ ra "lẻ, hoặc vô hạn tuần hoàn, số vô tỷ...", điều này gây bất lợi cho quá trình phân tích nhân tử. Mặc dù vậy chúng ta vẫn còn một biến đổi vô cùng đơn giản – thuần túy, đó là sử dụng hằng đẳng thức lập phương một tổng (hiệu), đưa bài toán về dạng $A^3 = B^3$. Những bài toán thực hiện bởi chú ý này đều có hình thức đặc biệt đưa về được hằng đẳng thức. Một số bài toán khác cần phải sử dụng công thức Cacdaro, tác giả xin trình bày tại Lý thuyết phần 3 bởi nó vượt quá khuôn khổ tài liệu phần 1 này.

Bài toán 102. Giải phương trình $6x^3 - x^2 + x = \frac{1}{3}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$18x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 17x^3 + (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{17}x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{17}+1}.$$

Kết luận nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{17}+1} \right\}$.

Bài toán 103. Giải phương trình $5x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^3 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + (x+2)^3 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = -\sqrt[3]{4}x \Leftrightarrow x = -\frac{2}{1+\sqrt[3]{4}}.$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S = \left\{ -\frac{2}{1+\sqrt[3]{4}} \right\}$.

Bài toán 104. Giải phương trình $21x^3 + 6x = 12x^2 + 1$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$13x^3 + 8x^3 - 12x^2 + 8x - 1 = 0 \Leftrightarrow 13x^3 + (2x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow 13x^3 = (1-2x)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{13} = 1 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{13}+2}.$$

Kết luận nghiệm duy nhất $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{13}+2} \right\}$.

Bài toán 105. Giải phương trình $\frac{2}{3}x^3 = x^2 - 3x + 3$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3 = 3x^2 - 9x + 9 \Leftrightarrow 6x^3 - 9x^3 + 27x - 27 = 0 \Leftrightarrow 5x^3 + (x-3)^3 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{5} = 3 - x \Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt[3]{5}+1}.$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{\sqrt[3]{5}+1}$.

Bài toán 106. Giải bất phương trình $9x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \le 0$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \le 0 \Leftrightarrow 8x^3 + \left(x+1\right)^3 \le 0 \Leftrightarrow x + 1 \le -2x \Leftrightarrow x \le -\frac{1}{3}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \le -\frac{1}{3}$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Biến đổi $3x^2\left(3x+1\right) + \left(3x+1\right) \le 0 \Leftrightarrow \left(3x^2+1\right)\left(3x+1\right) \le 0 \Leftrightarrow x \le -\frac{1}{3}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \le -\frac{1}{3}$.

Bài toán 107. Giải bất phương trình $x^3 - 3x^2 + 3x > 10 \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 9 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^3 > 9 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{9} + 1$.
Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > \sqrt[3]{9} + 1$.

Bài toán 108. Giải bất phương trình $17x^3 - 6x^2 + 12x \ge 8 \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Biến đổi $16x^3 + x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \ge 0 \Leftrightarrow 16x^3 \ge \left(2-x\right)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{16} \ge 2 - x \Leftrightarrow x \ge \dfrac{2}{1+\sqrt[3]{16}}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \ge \dfrac{2}{1+\sqrt[3]{16}}$.

Bài toán 109. Giải bất phương trình $22x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \le 0 \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$21x^3 + x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \le 0 \Leftrightarrow 21x^3 \le \left(3-x\right)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{21} \le 3 - x \Leftrightarrow x \le \frac{3}{1+\sqrt[3]{21}}.$$

Vậy bất phương trình ban đầu có nghiệm $x \le \dfrac{3}{1+\sqrt[3]{21}}$.

Bài toán 110. Giải bất phương trình $\dfrac{7x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{3x^2 - x + 4} \le 0 \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Nhận xét $3x^2 - x + 4 = \frac{1}{2}\left(6x^2 - 2x + 8\right) = \frac{1}{2}\left[\left(x-1\right)^2 + 5x^2 + 7\right] > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Biến đổi: $7x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \le 0 \Leftrightarrow 6x^3 + \left(x+2\right)^3 \le 0 \Leftrightarrow x + 2 \le -x\sqrt[3]{6} \Leftrightarrow x \le -\dfrac{2}{\sqrt[3]{6}+1}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \le -\dfrac{2}{\sqrt[3]{6}+1}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x^3 - 3x^2 + 3x = 19$.
2. $2x^3 + 6x^2 + 6x = 7$.
3. $x^3 - 12x^2 + 6x = 19$.
4. $4x^3 - 12x^2 + 12x > 17$.
5. $x^3 - 9x^2 + 27x \le 47$.
6. $\dfrac{3x^3 - 9x^2 + 9x - 11}{2x^7 + 5x^5 - 1975} = 0$.
7. $\dfrac{8x^3 - 12x^2 + 8x - 15}{30x^8 - 3x + 1980} = 0$.
8. $\dfrac{8x^3 + 12x^2 + 6x + 9}{x^2 - 6x + 17} \le 0$.
9. $\dfrac{x^3 + 9x^2 + 27x + 33}{x^4 - x + 6} \ge 0$.
10. $\dfrac{5x^3 - 15x^2 + 15x + 16}{x^3 + x - 10} > 0$.
11. $\dfrac{7x^3 - 21x^2 + 21x - 31}{x^3 + 4x - 5} < 0$.
12. $\dfrac{x^3 - 8x}{8x^3 - 12x^2 + 6x - 7} \le 0$.
13. $\dfrac{4x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \le 0$.
14. $\dfrac{5x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{x^3 + x^2 + x - 3} > 0$.
15. $\dfrac{7x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{11x^2 - x + 11} \ge 0$.
16. $\dfrac{5x^3 - 9x^2 + 9x - 27}{2x^3 - 7x^2 + 8x - 3} < 0$.
17. $\dfrac{4x^3 + 9x^2 + 9x + 27}{x^3 - 4x^2 + 4x} < 0$.
18. $\dfrac{-6x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3x^3 + x^2 + 2x - 6} \ge 0$.
19. $\dfrac{4x^3 + x^2 + 4x - 9}{-9x^3 + 12x^2 + 6x + 1} < 0$.
20. $\dfrac{17x^3 - 12x^2 + 6x - 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \ge 0$.
21. $\dfrac{27x^3 + 6x^2 + 6x + 2}{5 - x^2 - 4x^3} > 0$.
22. $\dfrac{6x^3 - 18x^2 + 18x - 11}{x^4 + x^2 - x + 2} > 0$.
23. $\dfrac{x^3 + 3x - 4}{10x^3 - 12x^2 + 6x - 1} \le 0$.

Bài toán 111. Giải phương trình $(x-3)^3+(x-5)^3=8 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-9x^2+27x-27+x^3-15x^2+75x-125=8 \Leftrightarrow 2x^3-24x^2+102x-160=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-12x^2+51x-80=0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2-7x+16)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x^2-7x+16=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) vô nghiệm do $\Delta<0$. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{5\}$.

Lời giải 2.

Đặt $x-4=t$; phương trình đã cho trở thành

$$(t-1)^3+(t+1)^3=8 \Leftrightarrow t^3-3t^2+3t-1+t^3+3t^2+3t+1=8 \Leftrightarrow 2t^3+6t-8=0 \Leftrightarrow t^3+3t-4=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t^2+t+4=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) vô nghiệm do $\Delta<0$. Với $t=1 \Leftrightarrow x-4=1 \Leftrightarrow x=5$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{5\}$.

Bài toán 112. Giải phương trình $(x-1)^3+(x-5)^3=64 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-3x^2+3x-1+x^3-15x^2+75x-125=64 \Leftrightarrow 2x^3-18x^2+78x-190=0$$

$$\Leftrightarrow x^3-9x^2+39x-95=0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2-4x+19)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ (x-2)^2=-15 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=5$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=5$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x-3=t$, phương trình đã cho tương đương với

$$(t+2)^3+(t-2)^3=64 \Leftrightarrow t^3+6t^2+12t+8+t^3-6t^2+12t-8=64 \Leftrightarrow 2t^3+24t-64=0$$

$$\Leftrightarrow t^3+12t-32=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t+16)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ (t+1)^2=-15 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow x=5$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài toán 113. Giải phương trình $(x-3)^4+(x-5)^4=16 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $x-4=t$; phương trình đã cho trở thành

$$(t-1)^4+(t+1)^4=16 \Leftrightarrow (t^2+1-2t)^2+(t^2+1+2t)^2=16$$

$$\Leftrightarrow (t^2+1)^2-4t(t^2+1)+4t^2+(t^2+1)^2-4t(t^2+1)+4t^2=16$$

$$\Leftrightarrow 2(t^2+1)^2+8t^2=16 \Leftrightarrow t^4+6t^2-7=0 \Leftrightarrow (t^2-1)(t^2+7)=0 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{3;5\}$.

Bài toán 114. Giải phương trình $(x-1)^4+(x-7)^4=162 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x-4=t$, phương trình đã cho trở thành

$$(t+3)^4+(t-3)^4=162 \Leftrightarrow (t^2+9+6t)^2+(t^2+9-6t)^2=162$$

$$\Leftrightarrow t^4+18t^2+81+12t(t^2+9)+36t^2+t^4+18t^2+81-12t(t^2+9)+36t^2=162$$

$$\Leftrightarrow t^4+18t^2+81+36t^2=81 \Leftrightarrow t^2(t^2+54)=0 \Leftrightarrow t=0 \Leftrightarrow x=4$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.

Bài toán 115. Giải bất phương trình $(x-2)^4+(x-4)^4\le 16 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x-3=t$, bất phương trình đã cho trở thành

$$(t-1)^4+(t+1)^4\le 16 \Leftrightarrow (t^2+1-2t)^2+(t^2+1+2t)^2\le 16$$

$$\Leftrightarrow (t^2+1)^2-4t(t^2+1)+4t^2+(t^2+1)^2-4t(t^2+1)+4t^2\le 16$$

$$\Leftrightarrow 2(t^2+1)^2+8t^2\le 16 \Leftrightarrow t^4+6t^2-7\le 0 \Leftrightarrow (t^2-1)(t^2+7)\le 0$$

$$\Leftrightarrow t^2\le 1 \Leftrightarrow -1\le t\le 1 \Leftrightarrow 2\le x\le 4$$

Vậy bất phương trình ban đầu có nghiệm $S=(2;4)$.

Bài toán 116. Giải bất phương trình $(x-2)^3+(x-3)^3>1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x-\frac{5}{2}=t$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\left(t+\frac{1}{2}\right)^3+\left(t-\frac{1}{2}\right)^3>1 \Leftrightarrow (2t+1)^3+(2t-1)^3>8 \Leftrightarrow 8t^3+12t^2+6t+1+8t^3-12t^2+6t-1>8$$

$$\Leftrightarrow 16t^3+12t-8>0 \Leftrightarrow 4t^3+3t-2>0 \Leftrightarrow (2t-1)(2t^2+t+2)>0 \Leftrightarrow t>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>3$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x>3$.

Nhận xét.

Qua quan sát, các bạn có thể thấy các phương trình – bất phương trình trên (từ 111 đến 116) hoàn toàn giải được bằng phương pháp biến đổi tương đương, khai triển hằng đẳng thức trực tiếp mà không thông qua bất kỳ phép đặt ẩn phụ nào. Đối với phương trình bậc cao, sử dụng ẩn phụ là một cách làm phổ biến và hiệu quả. Các bài toán trên có dạng tổng quát $(x+a)^n+(x+b)^n=c$, *phép đặt ẩn phụ trung bình* $x+\frac{a+b}{2}=t$ *sẽ làm cho các tính toán trở nên tương tự, mặc dù các phép khai triển vẫn diễn ra bình thường, bậc của khai triển không giảm, đổi lại chúng ta có thể triệt tiêu một số hạng tử giống nhau, từ đây dẫn đến kết quả nhanh chóng, dễ dàng hơn.*

Bài toán 117. Giải phương trình $(x+3)^3-x^3=27 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3+9x^2+27x+27-x^3=27 \Leftrightarrow x(x+3)=0 \Leftrightarrow x\in\{-3;0\}$.

Kết luận phương trình có hai nghiệm.

Bài toán 118. Giải phương trình $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+x^3+3x^2+3x+1+x^3+6x^2+12x+8=0 \Leftrightarrow 3x^3+9x^2+15x+9=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+5x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ (x+1)^2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 119. Giải phương trình $(x-1)^3+2(2x-1)^3=2x^3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3-3x^2+3x-1+2(8x^3-12x^2+6x-1)=2x^3 \Leftrightarrow 15x^3-27x^2+15x-3=0$$

$$\Leftrightarrow 5x^3-9x^2+5x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(5x^2-4x+1)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Phương trình có tập nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 120. Giải phương trình $(x+3)^3+(2x-1)^3=(3x+2)^3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $x+3=a;2x-1=b \Rightarrow a+b=3x+2$. Phương trình đã cho trở thành

$$a^3+b^3=(a+b)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b) \Leftrightarrow ab(a+b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ 2x-1=0 \\ 3x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{-3;-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{2}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+9x^2+27x+27+8x^3-12x^2+6x-1=27x^3+54x^2+36x+8$$

$$\Leftrightarrow 18x^3+57x^2+3x-18=0 \Leftrightarrow 6x^3+19x^2+x-6=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+3)(3x+2)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-3;-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{2}\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 121. Giải phương trình $(2x-3)^3+(x+4)^3=(1+3x)^3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $2x-3=u;x+4=v \Rightarrow 1+3x=u+v$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$u^3+v^3=(u+v)^3 \Leftrightarrow u^3+v^3=u^3+v^3+3uv(u+v) \Leftrightarrow uv(u+v)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(x+4)(1+3x)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{3}{2};-\frac{1}{3};-4\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm.

Bài toán 122. Giải bất phương trình $(3x-2)^3+(5x-2)^3\le(8x-4)^3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $3x-2=u;5x-2=v\Rightarrow 8x-4=u+v$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$u^3+v^3\le(u+v)^3 \Leftrightarrow u^3+v^3\le u^3+v^3+3uv(u+v) \Leftrightarrow uv(u+v)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)(5x-2)(2x-1)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge\frac{2}{3} \\ \frac{2}{5}\le x\le\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm như trên.

Bài toán 123. Giải bất phương trình $(x+2)^3-(5-2x)^3\ge 27(x-1)^3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x+2=u;2x-5=v\Rightarrow u+v=3x-3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$u^3+v^3\ge(u+v)^3 \Leftrightarrow u^3+v^3\ge u^3+v^3+3uv(u+v) \Leftrightarrow uv(u+v)\le 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x-5)(x-1)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -2 \\ 1\le x\le\frac{5}{2}\end{array}\right.$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(-\infty;-2]\cup\left[1;\frac{5}{2}\right]$.

Bài toán 124. Giải phương trình $(x+1)^3+(x+2)^3+5(x+1)(x+2)\le(2x+3)^3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+3x^2+3x+1+x^3+6x^2+12x+8+5(x^2+3x+2)\le 8x^3+36x^2+54x+27$$

$$\Leftrightarrow 6x^3+22x^2+24x+8\ge 0 \Leftrightarrow 3x^3+11x^2+12x+4\ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(3x+2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge -\frac{2}{3} \\ -2\le x\le -1\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[-2;-1]\cup\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $x+1=a;x+2=b\Rightarrow 2x+3=a+b$, bất phương trình đã cho trở thành

$$a^3+b^3+5ab\le(a+b)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3+5ab\le a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow ab(3a+3b-5)\ge 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x+2)(3x+2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge -\frac{2}{3} \\ -2\le x\le -1\end{array}\right.$$

Kết luận nghiệm tương tự lời giải 1.

Bài toán 125. Giải phương trình $\left(x+2\right)^3+\left(3-x\right)^3+3\left(x+2\right)\left(3-x\right)=125 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Đặt $x+2=a;3-x=b\Rightarrow a+b=5$. Phương trình đã cho trở thành

$$a^3+b^3+3ab=\left(a+b\right)^3\Leftrightarrow a^3+b^3+3ab=a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)$$
$$\Leftrightarrow ab\left(a+b-1\right)=0\Leftrightarrow 4ab=0\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(3-x\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-2;3\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 2.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+6x^2+12x+8-\left(x^3-9x^2+27x-27\right)+3\left(-x^2+x+6\right)=125$$
$$\Leftrightarrow 12x^2-12x-72=0\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow x\in\left\{-2;3\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Nhận xét.
Quan sát các bài toán từ 117 đến 125, các bạn có thể thấy mỗi bài toán đều giải được bằng hai phương pháp: biến đổi tương đương hoặc đặt ẩn phụ (hai ẩn phụ). Với hình thức đặc thù của lớp bài toán này, phép đặt ẩn phụ sẽ làm cho bài toán trở nên gọn gàng hơn, từ đó đơn giản định hướng vấn đề, các bạn lưu ý các hằng đẳng thức khai triển (bậc ba) quen thuộc sau đây

$$\left(a+b\right)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)$$
$$\left(a-b\right)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2=a^3-b^3-3ab\left(a-b\right)$$

Ngoài ra phép đặt ẩn phụ nhưng một số hạng tử hoặc nhân tử còn lại không nhất thiết biểu thị theo biến phụ vẫn cho chúng ta những lời giải đẹp mắt. Mời các bạn quan sát các ví dụ tiếp theo.

Bài toán 126. Giải phương trình $\left(x+1\right)^3+\left(2x+1\right)^3+3\left(2x^2+3x+1\right)\left(6x+5\right)=\left(3x+2\right)^3 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Đặt $x+1=a;2x+1=b\Rightarrow 3x+2=a+b$. Phương trình đã cho tương đương với

$$a^3+b^3+3\left(x+1\right)\left(2x+1\right)\left(6x+5\right)=a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left(2x+1\right)\left(6x+5\right)=\left(x+1\right)\left(2x+1\right)\left(3x+2\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(x+1\right)\left(2x+1\right)=0\\6x+5=3x+2\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left\{-1;-\frac{1}{2}\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 127. Giải bất phương trình $x^3+\left(x-1\right)^3+3x\left(x-1\right)\left(x^4+x\right)\ge\left(2x-1\right)^3 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2x-1\right)^3-3x\left(x-1\right)\left(2x-1\right)+3x\left(x-1\right)\left(x^4+x\right)\ge\left(2x-1\right)^3$$
$$\Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left(x^4-x+1\right)\ge 0\Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left[\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le 0\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge 1\vee x\le 0$.

Bài toán 128. Giải bất phương trình $x^3+(x+2)^3+3(x^2+3x+1)^2\ge 8(x+1)^3+3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+(x+2)^3+3(x^2+3x+1)^2-3\ge 8(x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 8(x+1)^3-3(2x+2)x(x+2)+3(x^2+3x)(x^2+3x+2)\ge 8(x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 3x(x+3)(x+1)(x+2)-6x(x+1)(x+2)\ge 0\Leftrightarrow x(x+1)^2(x+2)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x\ge 0\\ x\le -2\end{array}\right.$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm như trên.

Bài toán 129. Giải bất phương trình $x^4+(x+1)^4+6(x^2+x)^2\ge (2x+1)^4 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^4+(x+1)^4+6(x^2+x)^2\ge (x+x+1)^4$$

$$\Leftrightarrow x^4+(x+1)^4+6(x^2+x)^2\ge x^4+(x+1)^4+4x(x+1)\left[x^2+(x+1)^2\right]+6(x^2+x)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x(x+1)\left[x^2+(x+1)^2\right]\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 0$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[-1;0]$.

Bài toán 130. Giải bất phương trình

$$x^4+(3x+1)^4+6x^2(3x+1)^2+4x(3x+1)(3x-13)\le (4x+1)^4 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(4x+1)^4-4x(3x+1)\left[x^2+(3x+1)^2\right]+4x(3x+1)(3x-13)\le (4x+1)^4$$

$$\Leftrightarrow 4x(3x+1)(10x^2+3x+14)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0\vee x\le -\frac{1}{3}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm như trên.

Bài toán 131. Giải bất phương trình

$$(x+1)^4+(x+2)^4+6(x^2+3x+2)^2+9x(x+1)(x+2)\ge (2x+3)^4 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x+1=a;x+2=b\Rightarrow a+b=2x+3$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$a^4+b^4+6a^2b^2+9xab\ge (a+b)^4\Leftrightarrow a^4+b^4+6a^2b^2+9xab\ge a^4+b^4+4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow ab(9x-4a^2-4b^2)\ge 0\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(8x^2+15x+20)\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le -1$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[-2;-1]$.

Bài toán 132. Giải phương trình $8x^3-(x+1)^3-4x(x+1)(2x-1)=(x-1)^3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3-(x+1)^3-4x(x+1)(2x-1)=\left[2x-(x+1)\right]^3$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-(x+1)^3-4x(x+1)(2x-1)=8x^3-(x+1)^3-3.2x.(x+1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 4x(x+1)(2x-1)-6x(x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow x(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x\in\{-1;0\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 133. Giải phương trình $(3x+1)^3-x^3+4x(3x+1)(x^2+1)=(2x+1)^3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x+1)^3+3x(3x+1)+4x(3x+1)(x^2+1)=(2x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow x(3x+1)(4x^2+3x+4)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{3};0\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 134. Giải bất phương trình $x^4+(3x+1)^4+6x^2(3x+1)^2+4x(3x+1)\le(2x+1)^4 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^4+(3x+1)^4+6x^2(3x+1)^2+4x(3x+1)\le\left[3x+1-x\right]^4$$

$$\Leftrightarrow x^4+(3x+1)^4+6x^2(3x+1)^2+4x(3x+1)\le(3x+1)^4+x^4+6x^2(3x+1)^2-4x(3x+1)\left[x^2+(3x+1)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 4x(3x+1)\left[x^2+(3x+1)^2+1\right]\le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}\le x\le 0$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[-\frac{1}{3};0\right]$.

Bài toán 135. Giải bất phương trình $(x+1)^4+(x+2)^4+6(x^2+3x+2)^2+7(x^2+3x+2)\le 1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^4+(x+2)^4+6(x^2+3x+2)^2+7(x^2+3x+2)\le\left[(x+2)-(x+1)\right]^4$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^4+(x+2)^4+6(x^2+3x+2)^2+7(x^2+3x+2)$$

$$\le(x+1)^4+(x+2)^4+6(x^2+3x+2)^2-4(x^2+3x+2)\left[(x+1)^2+(x+2)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (x^2+3x+2)\left[4(x+1)^2+4(x+2)^2+7\right]\le 0 \Leftrightarrow x^2+3x+2\le 0 \Leftrightarrow -2\le x\le -1$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[-2;-1]$.

Nhận xét.
Phép đặt ẩn phụ sẽ làm cho bài toán trở nên sáng sủa hơn, về bản chất thì không có gì thay đổi, các bạn có thể hoàn toàn chỉ sử dụng phép biến đổi hằng đẳng thức thông thường. Chú ý rằng

$$(a+b)^4=a^4+b^4+6a^2b^2+4ab(a^2+b^2)$$

$$(a-b)^4=a^4+b^4+6a^2b^2-4ab(a^2+b^2)$$

Bài toán 136. Giải phương trình $\left(x^2+1\right)^3+\left(x+1\right)^3=\left(x^2+x+2\right)^3 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2+1\right)^3+\left(x+1\right)^3=\left(x^2+1+x+1\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^3+\left(x+1\right)^3=\left(x^2+1\right)^3+\left(x+1\right)^3+3\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left[\left(x^2+1\right)+\left(x+1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left[x^2+x+2\right]=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 137. Giải bất phương trình $\left(x^2-x\right)^3+\left(x^2+x+1\right)^3+x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)\le\left(2x^2+1\right)^3 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2-x\right)^3+\left(x^2+x+1\right)^3+x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)\le\left(x^2-x+x^2+x+1\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)^3+\left(x^2+x+1\right)^3+x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)$$

$$\le\left(x^2-x\right)^3+\left(x^2+x+1\right)^3+3x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)\left(2x^2+1\right)$$

$$\Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)\left(6x^2+2\right)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 1\\ x\le 0\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge 1\vee x\le 0$.

Bài toán 138. Giải bất phương trình $x^3+\left(x^2+x+1\right)^3+x\left(x^2+x+1\right)\left(x+1\right)^2\ge\left(x+1\right)^6 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+\left(x^2+x+1\right)^3+x\left(x^2+x+1\right)\left(x+1\right)^2\ge\left[x+\left(x^2+x+1\right)\right]^3$$

$$\Leftrightarrow x^3+\left(x^2+x+1\right)^3+x\left(x^2+x+1\right)\left(x+1\right)^2\ge x^3+\left(x^2+x+1\right)^3+3x\left(x^2+x+1\right)\left(x+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x\left(x^2+x+1\right)\left(x+1\right)^2\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x\ge 0\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x=-1\vee x\ge 0$.

Bài toán 139. Giải bất phương trình

$$\left(3x+2\right)^3+\left(x^2+x+2\right)^3\le\left(x+2\right)^6-7x\left(3x+2\right)\left(x^2+x+2\right) \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right).$$

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(3x+2\right)^3+\left(x^2+x+2\right)^3\le\left[3x+2+x^2+x+2\right]^3-7x\left(3x+2\right)\left(x^2+x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(3x+2\right)^3+\left(x^2+x+2\right)^3\le\left(3x+2\right)^3+\left(x^2+x+2\right)^3+3\left(3x+2\right)\left(x^2+x+2\right)\left(x+2\right)^2-7x\left(3x+2\right)\left(x^2+x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(3x+2\right)\left(x^2+x+2\right)\left(3x^2+5x+12\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge-\frac{2}{3}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\ge-\dfrac{2}{3}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $(x+4)^3 - x^3 = 64$.
2. $(x-2)^3 + (x-4)^3 = 8$.
3. $(x-4)^3 + (x-6)^3 > 28$.
4. $(x-5)^3 - (7-x)^3 + x^3 = 133$.
5. $(x-1)^3 + (x+6)^3 \le (2x+5)^3$.
6. $(x+3)^3 - (x-1)^3 = 56$.
7. $x^3 + (x-1)^3 + 3x(x-1) \ge (2x-1)^3$.
8. $(x+1)^3 + (2x+1)^3 + 3x^2(x+1)(3x+2) \le (3x+2)^3$.
9. $(x+1)^3 + (x+3)^3 + 6(x+1)(4x+7)(x+3) > 8(x+2)^3$.
10. $x^3 + (x+1)^3 + x(x+1)(x^2+2x+10) > (2x+1)^3$.
11. $(x-1)^3 + (x-2)^3 + x^2(x^2-3x+2) = (2x-3)^3$.
12. $x^3 + (x^2-x+1)^3 + 4x(x^2-x+1) \le (x^2+1)^3$.
13. $(x-3)(2x-3)(x^2+x+1) + x^3 + (x-3)^3 \le (2x-3)^3$.
14. $(x^2+1)^3 + (x-1)^3 + (x^4-1)(x^2+2) \le (x^2+x)^3$.
15. $(5x+3)^3 - (2x+1)^3 + 4(6x^2+7x+2)(x-5) = (3x+2)^3$.
16. $(x+4)^3 + (x^2-4)^3 + (x^2+2x-8)(x^2+2x)(3+x^2) > (x^2+x)^3$.
17. $(x^2-3x)^3 + (x+1)^3 + 3(x^2-9)(x+1)(x-1)^2 \ge (x-1)^6$.
18. $(x-4)^4 + (x-6)^4 = 16$.
19. $(x-2)^4 + (4-x)^4 = 2$.
20. $(x+2)^4 + (x+8)^4 > 272$.
21. $(1-x)^4 + x^4 = 97$.
22. $(x-2,5)^4 + (1,5-x)^4 \le 1$.
23. $(2x-3)^4 + (2x-1)^4 \ge 2$.
24. $x^4 + (x-1)^4 + 6x^2(x-1)^2 + 4x(x^2-4x-1)(2x^2-2x+1) = (2x-1)^4$.
25. $(x-1)^4 + (x+1)^4 + 6(x^2-1)^2 + 4x^3(x^4-1) \le 16x^4$.
26. $(x+2)^4 + (2x+3)^4 + 6(x+2)^2(2x+3)^2 + 4(5x^2+16x+13)(3x^2+3x+10) \ge (3x+5)^4$.
27. $x^4 + (3x-1)^4 + x(3x-1)(41x^2-22x+5) + 6x^2(3x-1)^2 \ge (4x-1)^4$.
28. $x^4 + (x+1)^4 + 4(x^2+x)(2x^2+2x+1) + 7x^2(x+1)^2(x+2012) \le (2x+1)^4$.
29. $(x-3)^4 + (2x+3)^4 + 6(x-3)^2(2x+3)^2 + (x^4+8x^2-13x-35)(5x^2+6x+18) > 81x^4$.

Bài toán 140. Giải phương trình $\left(x^2+x+1\right)^2+2\left(2x+1\right)^2=27 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2+x+1\right)^2+2\left(2x+1\right)^2=27 \Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)^2+2\left(4x^2+4x+1\right)=27 \Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)^2+8\left(x^2+x+1\right)=33.$$

Đặt $x^2+x+1=t\ (t>0)$ ta thu được $t^2+8t=33 \Leftrightarrow (t+11)(t-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-11 \\ t=3 \end{array}\right.$

Loại trường hợp $t=-11<0$. Với $t=3 \Leftrightarrow x^2+x=2 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{-2;1\}$.

Lời giải 2.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4+2x^2+1+2x\left(x^2+1\right)+x^2+2\left(4x^2+4x+1\right)=27$$
$$\Leftrightarrow x^4+2x^3+11x^2+10x-24=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+3x^2+14x+24\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left(x^2+x+12\right)=0 \Leftrightarrow x\in\{-2;1\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 141. Giải phương trình $x^2(x+6)^2+(x+3)^2=65 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2+6x\right)^2+x^2+6x=56 \Leftrightarrow \left(x^2+6x\right)^2+8\left(x^2+6x\right)=7\left(x^2+6x\right)+56$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+6x+8\right)\left(x^2+6x-7\right)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x+4)(x-1)(x+7)=0 \Leftrightarrow x\in\{-7;-4;-2;1\}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Lời giải 2.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2\left(x^2+12x+36\right)+x^2+6x+9=65 \Leftrightarrow x^4+12x^3+37x^2+6x-56=0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2+6x-7\right)+6x\left(x^2+6x-7\right)+8\left(x^2+6x-7\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+6x-7\right)\left(x^2+6x+8\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(x+4)(x-1)(x+7)=0 \Leftrightarrow x\in\{-7;-4;-2;1\}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm như trên.

Nhận xét.

Hai bài toán trên mở đầu cho lớp bài toán phương trình – bất phương trình bậc cao giải bằng phương pháp sử dụng ẩn phụ (bước đầu với một ẩn phụ), quy về phương trình bậc hai hoặc cao hơn với biến mới. Lời giải 2 của mỗi bài toán trên sử dụng phép nhẩm nghiệm và hệ số bất định phân tích đa thức nhân tử. Về kỹ thuật hệ số bất định tác giả xin trình bày tại phần 2. Thông thường, yếu tố cấu thành ẩn phụ không quá ẩn, thường chứa trong các phân thức, hằng đẳng thức hay phép khai triển đa thức, các bạn chú ý biến đổi và liên hệ để có được những lời giải chính xác, gọn gàng nhất.

Bài toán 142. Giải phương trình $(x-5)^2+\left(x^2-10x+1\right)^2=26 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2-10x+25+\left(x^2-10x+1\right)^2=26\Leftrightarrow\left(x^2-10x+1\right)^2+x^2-10x+1=2$.

Đặt $x^2-10x+1=t$ thu được $t^2+t=2\Leftrightarrow(t-1)(t+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=1\end{array}\right.$

- Với $t=-2\Leftrightarrow x^2+10x+3=0\Leftrightarrow x=-5+\sqrt{22};x=-5-\sqrt{22}$.
- Với $t=1\Leftrightarrow x^2+10x=0\Leftrightarrow x\in\{-10;0\}$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm $S=\left\{-5-\sqrt{10};-5+\sqrt{10};-10;0\right\}$.

Bài toán 143. Giải phương trình $x^2(x-1)^2+2(2x-1)^2=86 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2(x-1)^2+2(2x-1)^2=86\Leftrightarrow\left(x^2-x\right)^2+2\left(4x^2-4x+1\right)=86\Leftrightarrow\left(x^2-x\right)^2+8\left(x^2-x\right)=84.$$

Đặt $x^2-x=t$ ta được $t^2+8t=84\Leftrightarrow(t-6)(t+14)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=6\\t=-14\end{array}\right.$

- $t=6\Leftrightarrow x^2+x-6=0\Leftrightarrow x\in\{2;-3\}$.
- $t=-14\Leftrightarrow x^2+x+14=0$ (Vô nghiệm vì $\Delta<0$).

Kết luận tập hợp nghiệm $S=\{-3;2\}$.

Bài toán 144. Giải phương trình $2\left(x^2-6x+1\right)^2+(x-3)^2=11 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\left(x^2-6x+1\right)^2+x^2-6x+9=11\Leftrightarrow2\left(x^2-6x+1\right)^2+x^2-6x+1=3$.

Đặt $x^2-6x+1=t$, ta có $2t^2+t=3\Leftrightarrow(t-1)(2t+3)=0\Leftrightarrow\left(x^2+6x\right)\left(2x^2+12x+5\right)=0$

Suy ra phương trình có bốn nghiệm $S=\left\{-6;0;\frac{-6+\sqrt{26}}{2};-\frac{6+\sqrt{26}}{2}\right\}$.

Bài toán 145. Giải phương trình $x^2(3x+2)^2+7(3x+1)^2=137 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(3x^2+2x\right)^2+7\left(9x^2+6x+1\right)=137\Leftrightarrow\left(3x^2+2x\right)^2+21\left(3x^2+2x\right)=130 \qquad [1].$$

Đặt $3x^2+2x=t$ ta có $[1]\Leftrightarrow t^2+21t-130=0\Leftrightarrow(t-5)(t+26)=0\Leftrightarrow t\in\{-26;5\}$.

- $t=-26\Leftrightarrow3x^2+2x+26=0$ (Vô nghiệm vì $\Delta<0$).
- $t=5\Leftrightarrow3x^2+2x-5=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{5}{3};1\right\}$.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 146. Giải bất phương trình $3(x+1)^2(x+3)^2+(x+2)^2\le31 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3\left(x^2+4x+3\right)^2+x^2+4x+3\le 30$

Đặt $x^2+4x+3=t$ ta thu được $3t^2+t\le 30\Leftrightarrow (t-3)(3t+10)\le 0\Leftrightarrow \left(x^2+4x\right)\left(3x^2+12x+19\right)\le 0$ $[*]$.

Nhận xét $3x^2+12x+19=3(x+2)^2+7>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $[*]\Leftrightarrow x(x+4)\le 0\Leftrightarrow -4\le x\le 0$.

Kết luận tập hợp nghiệm $S=[-4;0]$.

Bài toán 147. Giải bất phương trình $x^2(x-10)^2+5(5-x)^2<125$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2-10x\right)^2+5\left(x^2-10x\right)<0\Leftrightarrow x(x-10)\left(x^2-10x+5\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<5-2\sqrt{5}\\5+2\sqrt{5}<x<10\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left(0;5-2\sqrt{5}\right)\cup\left(5+2\sqrt{5};10\right)$.

Bài toán 148. Giải bất phương trình $(x+1)(x-3)\left(x^2-2x\right)=-2$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với $\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2-2x\right)+2=0$.

Đặt $x^2-2x=t$ thu được $(t-3)t+2=0\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow (t-1)(t-2)=0\Leftrightarrow t=1\vee t=2$.

- $t=1\Leftrightarrow x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=1+\sqrt{2};x=1-\sqrt{2}$.
- $t=2\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow x=1+\sqrt{3};x=1-\sqrt{3}$.

Kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm $S=\left\{1-\sqrt{3};1-\sqrt{2};1+\sqrt{2};1+\sqrt{3}\right\}$.

Bài toán 149. Giải bất phương trình $(2x-3)^4+x(x-3)>-1$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với $\left(4x^2-12x+9\right)^2+x(x-3)+1>0$.

Đặt $4x^2-12x+9=t,t\ge 0\Rightarrow x(x-3)=\dfrac{t-9}{4}$, thu được

$$4t^2+t-9+4>0\Leftrightarrow (t-1)(4t+5)>0\Leftrightarrow t>1\Leftrightarrow 4\left(x^2-3x+2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\x<1\end{array}\right.$$

Kết luận nghiệm $x>2\vee x<1$.

Bài toán 150. Giải phương trình $\left(2x^2-x\right)^2+(2x+1)(x-1)=11$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với $\left(2x^2-x\right)^2+2x^2-x-12=0$.

Đặt $2x^2-x=t$ ta thu được $t^2+t-12=0\Leftrightarrow (t-3)(t+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-4\end{array}\right.$

- Với $t=3\Leftrightarrow 2x^2-x-3=0\Leftrightarrow x=-1;x=\dfrac{3}{2}$.
- Với $t=-4\Leftrightarrow 2x^2-x+4=0$ (Vô nghiệm vì $\Delta<0$).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 151. Giải phương trình $(x+3)(x-2)(x^2+x-4)=-1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với $(x^2+x-6)(x^2+x-4)=-1$.

Đặt $x^2+x=t$ ta có $(t-6)(t-4)+1=0 \Leftrightarrow (t-5)^2=0 \Leftrightarrow t=5 \Leftrightarrow x2+x-5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}; x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 152. Giải phương trình $(x^2+2x-1)(x+1)^2=-1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2+2x-1)(x^2+2x+1)+1=0 \Leftrightarrow (x^2+2x)^2-1+1=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Leftrightarrow x\in\{-2;0\}.$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 153. Giải bất phương trình $2(x^2-4x)^2+(x-2)^2\le 4 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x^2-4x)^2+x^2-4x\le 0 \Leftrightarrow (x^2-4x)(2x^2-8x+1)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2+\dfrac{\sqrt{14}}{2}\le x\le 4 \\ 0\le x\le 2-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm như trên.

Bài toán 154. Giải bất phương trình $(x-1)^4+x(x-2)>1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-1)^4+x^2-2x+1>2 \Leftrightarrow (x-1)^4+(x-1)^2>2.$$

Đặt $(x-1)^2=t \quad (t\ge 0)$ thu được $t^2+t-2\ge 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)\ge 0 \Leftrightarrow t\ge 1 \Leftrightarrow |x-1|\ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le 0\end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có nghiệm $S=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

Bài toán 155. Giải bất phương trình $2x(8x-1)^2(4x-1)<9 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với $(64x^2-16x+1)(8x^2-2x)<9$.

Đặt $8x^2-2x=t$ ta thu được $(8t+1)t<9 \Leftrightarrow 8t^2+t-9<0 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{8}<t<1 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-2x+\dfrac{9}{8}>0 \\ 8x^2-2x-1<0\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right]$.

Bài toán 156. Giải bất phương trình $(x-3)^4+(x-1)(x-5)<16 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với
$$(x-3)^4+x^2-6x+9<20\Leftrightarrow (x-3)^4+(x-3)^2<20.$$
Đặt $(x-3)^2=t\quad(t\ge 0)$ ta thu được $t^2+t-20<0\Leftrightarrow (t-4)(t+5)<0\Leftrightarrow t<4\Leftrightarrow |x-3|<2\Leftrightarrow 1<x<5$.
Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(1;5)$.

Bài toán 157. Giải bất phương trình $x^3(x-4)^3+(x-2)^2<4\qquad(x\in\mathbb{R})$.
Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với
$$(x^2-4x)^3+x^2-4x<0\Leftrightarrow (x^2-4x)\left[(x^2-4x)^2+1\right]<0\Leftrightarrow x(x-4)<0\Leftrightarrow 0<x<4.$$
Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(0;4)$.

Bài toán 158. Giải bất phương trình $x(x+1)(x^2+x+1)\le 12\qquad(x\in\mathbb{R})$.
Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với
$$(x^2+x)(x^2+x+1)\le 12\Leftrightarrow\left(x^2+x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\le 12$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\le 12\Leftrightarrow\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{49}{4}\Leftrightarrow\left|x^2+x+\frac{1}{2}\right|\le\frac{7}{2}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-3\le 0\\ x^2+x+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x^2+x-3\le 0\Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{13}}{2}\le x\le\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$
Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[-\frac{1+\sqrt{13}}{2};\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

Bài toán 159. Giải bất phương trình $(x^2-1)(x^2+4x+3)\le 192\qquad(x\in\mathbb{R})$.
Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với
$$(x-1)(x+1)(x+1)(x+3)\le 192\Leftrightarrow (x^2+2x+1)(x^2+2x-3)\le 192.$$
Đặt $x^2+2x+1=t\quad(t\ge 0)$ ta thu được
$$t(t-4)\le 192\Leftrightarrow t^2-4t-192\le 0\Leftrightarrow -12\le t\le 16\Leftrightarrow x^2+2x+1\le 16\Leftrightarrow x^2+2x-15\le 0\Leftrightarrow -5\le x\le 3.$$
Vậy bất phương trình ban đầu có nghiệm $S=[-5;3]$.

Bài toán 160. Giải phương trình $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)=9\qquad(x\in\mathbb{R})$.
Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với
$$\left[(x-1)(x+5)\right]\left[(x+1)(x+3)\right]=9\Leftrightarrow (x^2+4x-5)(x^2+4x+3)=9\quad(1).$$

Đặt $x^2+4x-1=t$; phương trình (1) trở thành

$$(t-4)(t+4)=9 \Leftrightarrow t^2=25 \Leftrightarrow (t-5)(t+5)=0 \Leftrightarrow (x^2+4x-4)(x^2+4x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2+\sqrt{8} \\ x=-2-\sqrt{8} \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{-2-\sqrt{8};-2+\sqrt{8};-2\right\}$.

Bài toán 161. Giải phương trình $(x-1)(x-2)(x+4)(x+5)=112 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[(x-1)(x+4)\right]\left[(x-2)(x+5)\right]=112 \Leftrightarrow (x^2+3x-4)(x^2+3x-10)=112 \qquad (1).$$

Đặt $x^2+3x-4=t$ thì (1) trở thành

$$t(t-6)=112 \Leftrightarrow (t+8)(t-14)=0 \Leftrightarrow (x^2+3x+4)(x^2+3x-18)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+3x-18=0 & (2) \\ x^2+3x+4=0 & (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (3) vô nghiệm do $\Delta<0$; $(2) \Leftrightarrow (x+6)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=3 \end{array}\right.$

Kết luận tập nghiệm của phương trình là $S=\{-6;3\}$.

Bài toán 162. Giải bất phương trình $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)\le 40 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left[(x+1)(x+5)\right]\left[(x+2)(x+4)\right]\le 40 \Leftrightarrow (x^2+6x+5)(x^2+6x+8)\le 40.$$

Đặt $x^2+6x+5=t$ ta thu được

$$t(t+3)\le 40 \Leftrightarrow t^2+3t-40\le 0 \Leftrightarrow -8\le t\le 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x\le 0 \\ x^2+6x+13\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6\le x\le 0 \\ (x+3)^2+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6\le x\le 0.$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S=[-6;0]$.

Nhận xét.

Các bài toán từ 159 đến 162 đều được giải bằng phương pháp đặt một ẩn phụ, có sự kết hợp khéo léo các nhân tử với nhau. Dễ thấy trong lời giải bài toán 160, cách đặt ẩn trung bình $x^2+4x-1=t$ giúp chúng ta đưa ngay phương trình về dạng hằng đẳng thức rất đẹp, không qua bước tính nghiệm phương trình bậc hai như bài toán 161, 162. Tùy theo kinh nghiệm và gu trình bày của bản thân, các bạn tự lựa chọn cho mình phương cách phù hợp nhất.

Lưu ý một số bài toán có dạng tổng quát: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$ trong đó các hệ số a,b,c,d thỏa mãn điều kiện $a+b=c+d$ hoặc $a+c=b+d; a+d=b+c$ nếu đảo vị trí. Tất yếu là $m\ne 0$. Cách giải:
Chẳng hạn $a+b=c+d=k$, ta nhận thấy nếu nhóm

$$\left[(x+a)(x+b)\right]\left[(x+c)(x+d)\right]=m \Leftrightarrow \left[x^2+(a+b)x+ab\right]\left[x^2+(c+d)x+cd\right]=m.$$

thì sẽ xuất hiện hạng tử chung x^2+kx, đây chính là điểm mấu chốt trong phép đặt ẩn phụ của hai lời giải trên.
Các bạn có thể đặt ẩn phụ theo nhiều cách, thường là cách đặt ẩn phụ trung bình sẽ tạo nhiều thuận lợi.

Bài toán 163. Giải phương trình $(x-4)(x-3)x(x+1)=60 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[(x-4)(x+1)\right]\left[x(x-3)\right]=60 \Leftrightarrow (x^2-3x-4)(x^2-3x)=60.$$

Đặt $x^2-3x-2=t$ thu được

$$(t-2)(t+2)=60 \Leftrightarrow t^2-4=60 \Leftrightarrow t^2-64=0 \Leftrightarrow (t-8)(t+8)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3x-10)(x^2-3x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 164. Giải phương trình $(x^2+2x-3)(x^2+8x+12)=-36 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-1)(x+3)(x+2)(x+6)=-36 \Leftrightarrow \left[(x-1)(x+6)\right]\left[(x+3)(x+2)\right]=-36$$

$$\Leftrightarrow (x^2+5x-6)(x^2+5x+6)+36=0 \Leftrightarrow (x^2+5x)^2-36+36=0 \Leftrightarrow x(x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-5 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình: $S=\{-5;0\}$.

Bài toán 165. Giải bất phương trình $(2x^2-7x+3)(2x^2+x-3)+9\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(2x-1)(x-3)(x-1)(2x+3)+9\le 0 \Leftrightarrow \left[(2x-1)(x-1)\right]\left[(x-3)(2x+3)\right]+9\le 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-3x+1)(2x^2-3x-9)+9\le 0 \Leftrightarrow (2x^2-3x+1)^2-10(2x^2-3x+1)+9\le 0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-3x)(2x^2-3x-8)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3-\sqrt{73}}{4}\le x\le 0 \\ \dfrac{3}{2}\le x\le \dfrac{3+\sqrt{73}}{4} \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm như trên.

Bài toán 166. Giải bất phương trình $(x^2-3x)(x^2+7x+10)>216 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x(x-3)(x+2)(x+5)>216 \Leftrightarrow \left[x(x+2)\right]\left[(x-3)(x+5)\right]=216$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x)(x^2+2x-15)>216 \Leftrightarrow (x^2+2x)^2-15(x^2+2x)-216>0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x+9)(x^2+2x-24)>0 \Leftrightarrow (x-4)(x+6)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-6 \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x>4 \vee x<-6$.

Nhận xét.

Các bài toán 164 đến 166 về cơ bản vẫn là lớp phương trình – bất phương trình sử dụng ẩn phụ như các bài toán phía trước, nét khác biệt điểm nhấn của những bài toán này là đề bài đã chủ ý chia cắt các nhân tử trong ẩn phụ, đảo vị trí và nhân đa thức, giấu đi bản chất thực của bài toán. Để giải quyết dạng toán này các bạn cần có kỹ năng phân tích nhân tử và nhân chia đa thức thuần thục, có cái nhìn khách quan đối với ẩn phụ để đặt biến một cách nhanh chóng, đưa về phương trình bậc hai, nhẩm nghiệm từ đó đưa về dạng tích – thương cần thiết. Đối với phương trình bậc cao nói chung, các bạn tìm các nghiệm tương ứng có thể giải riêng biệt (chia trường hợp giá trị), tuy nhiên đối với bất phương trình thì không nên chia trường hợp sẽ rất phức tạp, cách làm phổ biến là trả lại ẩn x ban đầu và giải bất phương trình tích với biến x sẽ đơn giản hơn. Lưu ý có thể thực hiện phép đặt ẩn phụ t hoặc chỉ biến đổi tương đương ẩn x đơn thuần như các bài 164 đến 166, về cơ cấu vẫn không thay đổi.

Bài toán 167. Giải phương trình $2x^3(x-2)^3+(x-1)^2=4 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3(x-2)^3+x^2-2x+1=4 \Leftrightarrow 2(x^2-2x)^3+x^2-2x-3=0.$$

Đặt $x^2-2x=t$ thu được

$$2t^3+t-3=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+2t+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ (t+1)^2+t^2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x\in\left\{1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right\}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1+\sqrt{2}; x=1-\sqrt{2}$.

Bài toán 168. Giải bất phương trình $2(x+1)^3(x+3)^3+3(x+2)^2\le 66 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $2(x^2+4x+3)^3+3(x^2+4x+3)-63\le 0$.

Đặt $x^2+4x+3=t$ thu được

$$2t^3+3t-63\le 0 \Leftrightarrow (t-3)(2t^2+6t+21)\le 0 \Leftrightarrow (t-3)\left[t^2+(t+3)^2+12\right]\le 0 \Leftrightarrow t\le 3 \Leftrightarrow x^2+4x\le 0 \Leftrightarrow -4\le x\le 0.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập hợp nghiệm $S=[-4;0]$.

Bài toán 169. Giải bất phương trình $(2x+1)^2<30-(x-2)^3(x+3)^3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(x-2)^3(x+3)^3+4x^2+4x+1<30 \Leftrightarrow (x^2+x-6)^3+4(x^2+x-6)-5<0.$$

Đặt $x^2+x-6=t$ thu được

$$t^3+4t-5<0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+5)<0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+2t+10)<0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left[t^2+(t+1)^2+9\right]<0 \Leftrightarrow t<1 \Leftrightarrow x^2+x-7<0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{29}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{29}}{2}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left[-\frac{1+\sqrt{29}}{2};\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right]$.

Bài toán 170. Giải bất phương trình $3(x-1)^3(x+4)^3+(2x+3)^2-32\ge 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3\left(x^2+3x-4\right)^3+4x^2+12x+9-32\ge 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2+3x-4\right)^3+4\left(x^2+3x-4\right)-7\ge 0.$$

Đặt $x^2+3x-4=t$ ta thu được

$$3t^3+4t-7\ge 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(3t^2+3t+7\right)\ge 0 \Leftrightarrow (t-1)\left[6t^2+6t+14\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left[(t+3)^2+5t^2+5\right]\ge 0 \Leftrightarrow t\ge 1 \Leftrightarrow x^2+3x-5\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{-3+\sqrt{29}}{2} \\ x\le \dfrac{-3-\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm như trên.

Bài toán 171. Giải phương trình $(x-3)^4+(x-2)(x-4)+1=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Biến đổi $(x-3)^4+x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow (x-3)^2\left[(x-3)^2+1\right]=0 \Leftrightarrow x=3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 172. Giải phương trình $(x-2)^4+(x-1)(x-3)<19 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(x-2)^4+x^2-4x+4<20 \Leftrightarrow (x-2)^4+(x-2)^2-20<0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-2)^2-4\right]\left[(x-2)^2+5\right]<0 \Leftrightarrow (x-2)^2<4$$

$$\Leftrightarrow |x-2|<2 \Leftrightarrow -2<x-2<2 \Leftrightarrow 0<x<4$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(0;4)$.

Bài toán 173. Giải bất phương trình $(x-1)^2(x+3)^2+(x-2)(x+4)+5\ge 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(x-1)^2(x+3)^2+x^2+2x-8+5\le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+3)^2+x^2+2x-3\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3)\left(x^2+2x-2\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3\le x\le -1-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-1\le x\le 1 \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[-3;-1-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3}-1;1\right]$.

Bài toán 174. Giải bất phương trình $(x-1)^3(x+2)^3+(x+4)(x-3)+10\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2+x-2\right)^3+x^2+x-12+10 \le 0 \Leftrightarrow \left(x^2+x-2\right)^3+x^2+x-2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left[\left(x^2+x-2\right)^2+1\right] \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 1$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[-2;1]$.

Bài toán 175. Giải bất phương trình $\left(x^2+x\right)\left(x^2+7x+12\right) \le 40 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x(x+1)(x+3)(x+4) \le 40 \Leftrightarrow \left[(x+1)(x+3)\right]\left[x(x+4)\right] \le 40$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+4x+3\right)\left(x^2+4x\right) \le 40 \Leftrightarrow \left(x^2+4x\right)^2+3\left(x^2+4x\right)-40 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+4x+8\right)\left(x^2+4x-5\right) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+5) \le 0 \Leftrightarrow -5 \le x \le 1$$

Kết luận tập nghiệm $S=[-5;1]$.

Bài toán 176. Giải phương trình $\left(x^2-4x\right)^2(x-1)(x+3)=4 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\left(x^2-4x\right)^2\left(x^2-4x+3\right)=4$.

Đặt $x^2-4x=t$ ta thu được

$$t^2(t+3)=4 \Leftrightarrow t^3+3t^2-4=0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-4x-1\right)\left(x^2-4x+2\right)^2=0 \Leftrightarrow x \in \left\{2+\sqrt{5};2-\sqrt{5};2+\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Bài toán 177. Giải bất phương trình $\left(2x^2-x\right)^2(2x+1)(x-1) \le 180 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\left(2x^2-x\right)^2\left(2x^2-x-1\right) \le 180 \Leftrightarrow \left(2x^2-x\right)^3-\left(2x^2-x\right)^2-180 \le 0$.

Đặt $2x^2-x=t$ ta thu được

$$t^3-t^2-180 \le 0 \Leftrightarrow (t-6)\left(t^2+5t+30\right) \le 0 \Leftrightarrow (t-6)\left(2t^2+10t+60\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (t-6)\left[t^2+(t+5)^2+35\right] \le 0 \Leftrightarrow t \le 6 \Leftrightarrow 2x^2-x-6 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+3) \le 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le x \le 2$$

Vậy bất phương trình ban đầu có nghiệm $S=\left[-\frac{3}{2};2\right]$.

Bài toán 178. Giải bất phương trình $(3x-2)^2\left(x^2-x\right)\left(3x^2+x\right) \le 4 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(3x-2)^2x(x-1)x(3x+1)\le 4 \Leftrightarrow (3x-2)^2x^2(x-1)(3x+1)\le 4 \Leftrightarrow (3x^2-2x)^2(3x^2-2x-1)\le 4$$

Đặt $3x^2-2x=t$ ta thu được

$$t^2(t-1)\le 4 \Leftrightarrow t^3-t^2-4\le 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+t+2)\le 0 \Leftrightarrow (t-2)(2t^2+2t+4)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)\left[t^2+(t+1)^2+3\right]\le 0 \Leftrightarrow t\le 2 \Leftrightarrow 3x^2-2x-2\le 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{3}\le x\le \frac{1+\sqrt{7}}{3}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[\frac{1-\sqrt{7}}{3};\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right]$.

Bài toán 179. Giải phương trình $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=7x^2+7x-2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+x=t(t+1)(t+2)=7t-2 \Leftrightarrow t^2+3t+2=7t-2 \Leftrightarrow (t-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x\in\{-2;1\}$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=-2;x=1$.

Bài toán 180. Giải phương trình $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x-2}=\frac{18}{x^2+2x-1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+2x\ne 1;x^2+2x\ne 2;x^2+2x\ne 3$.

Đặt $x^2+2x-3=t$ phương trình đã cho trở thành

$$\frac{5}{t}+\frac{6}{t+1}=\frac{14}{t+2} \Leftrightarrow (11t+5)(t+2)=14t(t+1) \Leftrightarrow 3t^2-13t-10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

- $t=5 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x\in\{-4;2\}$.
- $t=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^2+6x-7=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{30}}{3};x=\frac{-3-\sqrt{30}}{3}$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình ban đầu có bốn nghiệm như trên.

Bài toán 181. Giải phương trình $3(2x^2+3x)(4x^2+6x+5)=(2x^2+3x+10)^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $2x^2+3x+10=t,t>0 \Rightarrow 4x^2+6x+5=2t-15$. Phương trình đã cho trở thành

$$3(t-10)(2t-15)=t^2 \Leftrightarrow 5t^2-105t+450=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=15 \end{array}\right.$$

- ✓ $t=15 \Leftrightarrow 2x^2+3x-5=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{5}{2};1\right\}$.
- ✓ $t=6 \Leftrightarrow 2x^2+3x+4=0,\Delta<0$, trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận. Phương trình đã cho có hai nghiệm $x=-\frac{5}{2};x=1$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\left(x^2+2x+4\right)\left(x^2+2x+3\right)=x^2+2x+7$.
2. $\left(x^2+x\right)\left(x^2+x+1\right)=x^2+x+4$.
3. $x\left(x-3\right)\left(x^2-3x+1\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)$.
4. $\left(x^2-x\right)\left(x^2-x+4\right)=\left(2x-1\right)^2+3$.
5. $\left(x-3\right)^2+\left(x+1\right)\left(x-7\right)=x\left(x-6\right)+9$.
6. $\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2-3x+2\right)=\left(x^2-3x\right)^2$.
7. $2\left(x^2-5x\right)\left(x^2-5x+3\right)=\left(x^2-5x+2\right)^2+4$.
8. $\left(3x^2-x\right)\left(3x^2-x+3\right)=\left(3x^2-x+6\right)^2-54$.
9. $\left(x^2+4x+1\right)^2+\left(x+2\right)^2=45$.
10. $\left(x^2-4x\right)^2+\left(x-2\right)^2\le 16$.
11. $\left(x^2+5x\right)^2+\left(x+2\right)\left(x+3\right)=48$.
12. $\left(x^2-7x\right)^2+\left(x+2\right)\left(x-9\right)>12$.
13. $\left(x^2+5x+2\right)^2+\left(x+2\right)\left(x+3\right)>10$.
14. $\left(x^2+x\right)^2+\left(2x-1\right)^2=5$.
15. $\left(2x+3\right)^2+\left(x+2\right)\left(x+1\right)<11$.
16. $\left(x+1\right)^2\left(x+5\right)^2+\left(x+3\right)^2\le 35$.
17. $\left(x+1\right)^2\left(x-7\right)^2+\left(x-3\right)^2\ge 58$.
18. $\left(2x-1\right)^2x^2+\left(2x-5\right)\left(x+2\right)>-8$.
19. $x^2\left(x-2\right)^2-\left(1-x\right)^2=5$.
20. $\left(x+3\right)^4+\left(x+1\right)\left(x+5\right)>86$.
21. $\left(x+2\right)^4+\left(x-2\right)\left(x+6\right)=4$.
22. $\left(3x-1\right)^4+\left(3x-1\right)\left(x+1\right)\le 20$.
23. $\left(4x-1\right)^4+\left(x-1\right)\left(2x+1\right)>81$.
24. $\left(5x-1\right)^4+\left(5x-7\right)\left(x+1\right)\ge 252$.
25. $x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)=9$.
26. $\left(x+5\right)\left(x+6\right)\left(x+8\right)\left(x+9\right)>40$.
27. $\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x-7\right)\left(x-8\right)\ge 144$.
28. $\left(2x-1\right)\left(2x+3\right)\left(x+2\right)\left(x+4\right)+9\le 0$.
29. $\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+4\right)=120$.
30. $\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)\left(x+7\right)+15>0$.

31. $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)\le 160$.
32. $(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)=3024$.
33. $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1)\le 4$.
34. $(3x+1)(x+1)(5x+1)(15x-7)+7>0$.
35. $(2x+3)(4x-4)(2x+1)(x+3)+36<0$.
36. $(x+2)(x-2)(x^2-10)=72$.
37. $(x^2-x)(x^2+3x+2)\le 3$.
38. $(x^2+3x-4)(x^2+x-6)\ge 24$.
39. $(x^2-1)(x+3)(x+5)>9$.
40. $(x^2-3x+2)(x^2+9x+20)=112$.
41. $(x^2+6x+5)(x^2+10x+21)\le 9$.
42. $(x^2+2x-3)(x^2+8x+12)>-36$.
43. $(x^2+4x+3)(x^2+6x+8)=24$.
44. $(x^2-4x-5)(x^2+10x+16)+80\ge 0$.
45. $(x^2+2x-8)(x^2+12x+27)=(x^2+7x)^2$
46. $(x^2+4x+3)(x-6)(x-8)+17\ge 0$.
47. $(x^2-6x+5)(x-6)(x-10)>300$.
48. $(4x^2-1)(x^2-3x+2)\le 70$.
49. $(x^2-3x)^3+(x-1)(x-2)=4$.
50. $(x-1)^3(x+3)^3+(x-4)(x+6)\le 9$.
51. $5x^3(2x-3)^3+4(2x-5)(x+1)+11\ge 0$.
52. $3(x-2)^6+(x-3)(x-1)-3\le 0$.
53. $2x^3(x+5)^3+3(x-3)(x+8)+67>0$.
54. $7x^3(x-4)^3+2(x-5)(x+1)+1=0$.
55. $x^2(x-3)^2(x-2)(x-1)\le 24$.
56. $(x-1)^2(x+2)^2(x-3)(x+2)>-9$.
57. $(x^2+x)(x^4+2x^3+x^2+4)\le 5$.
58. $(x-3)^2x^2(x^2-3x-4)\le 25$.
59. $x^2(x+4)^2(x-1)(x+5)>36$.
60. $(x+3)^2(x+2)^2(x+7)(x-2)\ge 225$.
61. $(2x-7)^2x^2(x-5)(2x+3)=256$.
62. $(x-2)^2(x+3)^2(x^2+x+1)\le 5(x^2+x-6)^2+1$.

Bài toán 182. Giải phương trình $\left(4x+3\right)^2\left(x+1\right)\left(2x+1\right)=9 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với $\left(4x+3\right)^2\left(4x+4\right)\left(4x+2\right)=9.8$.

Đặt $4x+3=t$ ta được

$$t^2\left(t+1\right)\left(t-1\right)=72\Leftrightarrow t^2\left(t^2-1\right)=72\Leftrightarrow\left(t^2+8\right)\left(t^2-9\right)=0\Leftrightarrow t^2=9\Leftrightarrow\left|t\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x+3=3\\4x+3=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với $\left(16x^2+24x+9\right)\left(2x^2+3x+1\right)=9$.

Đặt $2x^2+3x+1=t$ suy ra

$$\left(8t+1\right)t-9=0\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(8t+9\right)=0\Leftrightarrow\left(2x^2+3x\right)\left(16x^2+24x+17\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(2x+3\right)\left[\left(4x+3\right)^2+8\right]=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{3}{2};0\right\}$$

Kết luận tập nghiệm $S=\left\{-\dfrac{3}{2};0\right\}$.

Bài toán 183. Giải phương trình $\left(6x+5\right)^2\left(3x+2\right)\left(x+1\right)=35 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(6x+5\right)^2\left(6x+4\right)\left(6x+6\right)=35.2.6\Leftrightarrow\left(6x+5\right)^2\left[\left(6x+5\right)^2-1\right]=420$$

$$\Leftrightarrow\left(6x+5\right)^4-\left(6x+5\right)^2-420=0\Leftrightarrow\left[\left(6x+5\right)^2-21\right]\left[\left(6x+5\right)^2+20\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(6x+5\right)^2-21=0\Leftrightarrow\left|6x+5\right|=\sqrt{21}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{21}-5}{6};x=-\frac{\sqrt{21}+5}{6}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với $\left(36x^2+60x+25\right)\left(3x^2+5x+2\right)=35$.

Đặt $3x^2+5x+2=t$ ta có

$$\left(12t+1\right)t-35=0\Leftrightarrow\left(3t-5\right)\left(4t+7\right)=0\Leftrightarrow\left(9x^2+15x+1\right)\left(12x^2+20x+15\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9x^2+15x+1=0\\\left(6x+5\right)^2=-20\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{21}+5}{6};x=\frac{\sqrt{21}-5}{6}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm như trên.

Bài toán 184. Giải phương trình $3\left(x+3\right)\left(x+4\right)\left(x+5\right)=8\left(x-2\right) \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x+4=t$, phương trình đã cho tương đương với

$$3t\left(t^2-1\right)=8\left(t-6\right)\Leftrightarrow 3t^3-11t+48=0\Leftrightarrow\left(t+3\right)\left(3t^2-9t+16\right)=0\Leftrightarrow t=-3\Leftrightarrow x=-7.$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 185. Giải phương trình $\left(x+5\right)\left(x+6\right)\left(x+7\right)=24 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x+6=t$, phương trình đã cho tương đương với

$$t(t-1)(t+1)=24\Leftrightarrow t(t^2-1)=24\Leftrightarrow t^3-t-24=0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t^2+3t+8)=0\Leftrightarrow t=3\Leftrightarrow x=-3$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $S=\{-3\}$.

Bài toán 186. Giải bất phương trình $(8x+3)^2(2x+1)(4x+1)\le 1815 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với $(8x+3)^2(8x+4)(8x+2)\le 1815.8$.
Đặt $8x+3=t$ ta thu được

$$t^2(t+1)(t-1)\le 14520\Leftrightarrow t^4-t^2-14520\le 0\Leftrightarrow (t^2-121)(t^2+120)\le 0$$

$$\Leftrightarrow t^2\le 121\Leftrightarrow -11\le t\le 11\Leftrightarrow -11\le 8x+3\le 11\Leftrightarrow -\frac{7}{4}\le x\le 1$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left[-\frac{7}{4};1\right]$.

Nhận xét.
Các bài toán từ 182 đến 186 đều giải được bằng cách sử dụng biến đổi tương đương – nâng lũy thừa kết hợp phương pháp hệ số bất định phân tích đa thức bậc bốn thành nhân tử. Hình thức các bài toán có sự đặc biệt, vì thế chỉ với một chút linh hoạt sẽ dẫn dắt tới cách đặt ẩn phụ khéo léo (theo hai cách), kết quả thu được lời giải ngắn gọn bất ngờ. Với cách giải nhân thêm hệ số (cách giải khó và ấn tượng nhất), các bạn chú ý nhân thêm hằng số sao cho các biểu thức có cùng dạng $kx+a;kx+b;kx+c,\ldots$ *để thao tác đặt ẩn phụ được khả thi.*

Bài tập tương tự.
Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $(12x+1)^2(x+1)(2x+1)=1$.
2. $(20x+1)^2(2x+1)(5x+1)=1$.
3. $(6x+7)^2(6x+5)(x+1)<12$.
4. $(7x+1)^2(7x+2)x\ge 336$.
5. $(4x+5)^2(4x+7)(4x+3)\le 45$.
6. $(9x+2)^2(3x+1)(9x+1)>200$.
7. $(x+5)(x+6)(x+7)=210$.
8. $(7x+6)^2(x+1)(7x+5)>180$.
9. $(5x^2+3)^2(5x^2+2)(5x^2+4)=72$.
10. $(3x+5)^2(x+2)(3x+4)\le 200$.
11. $(2x+3)(x+2)(x+1)>30$.
12. $5(x+5)(x+4)(x+6)=4(x+150)$.
13. $2(x+6)(x+7)(x+8)\ge 3(x+224)$.
14. $(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)\le 4(x^2+5)$.

Bài toán 187. Giải phương trình $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=\frac{5}{2}\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 0$. Đặt $\frac{x^2+1}{x}=t$; phương trình đã cho trở thành

$$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow (t-2)(2t-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\\ 2t=1\end{array}\right.$$

- Với $t=2\Rightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.
- Với $2t=1\Leftrightarrow 2x^2-x+2=0$. Phương trình này vô nghiệm vì $\Delta<0$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận tập nghiệm $S=\{1\}$.

Bài toán 188. Giải phương trình $\frac{2x^2+1}{3x}+\frac{x}{2x^2+1}=\frac{4}{3}\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 0$. Đặt $\frac{2x^2+1}{x}=t$; phương trình đã cho trở thành

$$\frac{t}{3}+\frac{1}{t}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow t^2-4t+3=0\Leftrightarrow (t-1)(t-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2-x+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(2x-1)\\ 3x^2+(x-1)^2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{2};1\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 189. Giải bất phương trình $\frac{2x^2+x+1}{x+1}+\frac{x+1}{2x^2+x+1}\leq 2\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -1$.

Đặt $\frac{2x^2+x+1}{x+1}=t$, bất phương trình đã cho trở thành $t+\frac{1}{t}\leq 2\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t}\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t<0\end{array}\right.$

- $t=1\Leftrightarrow 2x^2+x+1=x+1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.
- $t<0\Leftrightarrow \frac{2x^2+x+1}{x+1}<0\Leftrightarrow \frac{3x^2+(x+1)^2+1}{x+1}<0\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1$.

Đối chiếu điều kiện ta có tập nghiệm $S=(-\infty;-1)\cup\{0\}$.

Bài toán 190. Giải bất phương trình $\frac{4x^2-x+1}{1-x}-\frac{4x^2}{4x^2-x+1}\leq 1\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4x^2-x+1}{1-x}+1-\frac{4x^2}{4x^2-x+1}\leq 2\Leftrightarrow \frac{4x^2-x+1}{1-x}+\frac{1-x}{4x^2-x+1}\leq 2.$$

Đặt $\frac{4x^2-x+1}{1-x}=t$ ta thu được $t+\frac{1}{t}\leq 2\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t}\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t<0\end{array}\right.$

Xét hai trường hợp

- $t=1 \Leftrightarrow 4x^2-x+1=1-x \Leftrightarrow 4x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.
- $t<0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2-x+1}{1-x}<0 \Leftrightarrow \dfrac{7x^2+(x-1)^2+1}{1-x}<0 \Leftrightarrow 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Bài toán 191. Giải bất phương trình $\dfrac{2x+1}{x^2}+\dfrac{x^2}{2(3x^2+4x+2)}\geq -\dfrac{1}{2}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4x+2}{x^2}+\frac{x^2}{3x^2+4x+2}\geq -1 \Leftrightarrow \frac{4x+2}{x^2}+3+\frac{x^2}{3x^2+4x+2}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{3x^2+4x+2}{x^2}+\frac{x^2}{3x^2+4x+2}\geq 2 \quad [*].$$

Đặt $\dfrac{3x^2+4x+2}{x^2}=t$ thì $[*] \Leftrightarrow t+\dfrac{1}{t}\geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{(t-1)^2}{t}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t>0 \end{array}\right.$

- $t=1 \Leftrightarrow 3x^2+4x+2=x^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$.
- Ta có $t=\dfrac{3x^2+4x+2}{x^2}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{(3x+2)^2+2}{x^2}>0,\forall x\neq 0$.

Vậy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với $x\neq 0$.

Bài toán 192. Giải bất phương trình $\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x}{1-x^2}\geq x+3$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 0; x\neq 1; x\neq -1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$1+\frac{1}{x}+\frac{x}{1-x^2}\geq x+3 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-x+\frac{x}{1-x^2}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x}+\frac{x}{1-x^2}\geq 2 \quad (*).$$

Đặt $\dfrac{1-x^2}{x}=t$ thì $(*) \Leftrightarrow t+\dfrac{1}{t}\geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{(t-1)^2}{t}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t>0 \end{array}\right.$

- $t=1 \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
- $t>0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^2}{x}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ x<-1 \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

Bài toán 193. Giải phương trình $\dfrac{2x-3}{3-x}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{5}{2}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\neq 0; x\neq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x(2x-3)+6(3-x)=5x(3-x) \Leftrightarrow 9x^2-27x+18=0 \Leftrightarrow 9(x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x\in\{1;2\}.$$

So sánh điều kiện, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm như trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \neq 0; x \neq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x-3}{3-x}+1+\frac{3}{x}-1=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{3-x}+\frac{3-x}{x}=\frac{5}{2}.$$

Đặt $\frac{x}{3-x}=t$ ta có $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow (2t-1)(t-2)=0 \Leftrightarrow (3x-3)(3x-6)=0 \Leftrightarrow x \in \{1;2\}$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận tập nghiệm $S=\{1;2\}$.

Bài toán 194. Giải phương trình $\frac{3x^2+3x+4}{2x+3}+\frac{6x^2+4x+5}{3x^2+x+1}=5 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -\frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3x^2+3x+4}{2x+3}-1+\frac{6x^2+4x+5}{3x^2+x+1}-2=2 \Leftrightarrow \frac{3x^2+x+1}{2x+3}+\frac{2x+3}{3x^2+x+1}=2.$$

Đặt $\frac{3x^2+x+1}{2x+3}=t$ ta được $t+\frac{1}{t}=2 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t}=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow 3x^2+x+1=2x+3 \Leftrightarrow 3x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=1; x=-\frac{2}{3}$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$.

Bài toán 195. Giải bất phương trình $\frac{3-3x^2}{5x}+\frac{5x}{2x^2+3}=2-x \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{3-3x^2}{5x}+x+\frac{5x}{2x^2+3}=2 \Leftrightarrow \frac{2x^2+3}{5x}+\frac{5x}{2x^2+3}=2$.

Đặt $\frac{2x^2+3}{5x}=t$ suy ra $t+\frac{1}{t}=2 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t}=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow 2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow x \in \left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

Bài toán 196. Giải phương trình $\frac{5x^2+4x+5}{4x+3}+\frac{x^2+5x+8}{x^2+x+5}=x+3 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -\frac{3}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{5x^2+4x+5}{4x+3}-x+\frac{x^2+5x+8}{x^2+x+5}-1=2 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+5}{4x+3}+\frac{4x+3}{x^2+x+5}=2.$$

Đặt $\frac{x^2+x+5}{4x+3}=t$ thu được $t+\frac{1}{t}=2 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t}=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S=\{1;2\}$.

Bài toán 197. Giải bất phương trình $x^2+\dfrac{1}{x^2}\geq 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-4 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 0$.
Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t\Rightarrow t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$t^2-2\geq 3t-4\Leftrightarrow t^2-3t+2\geq 0\Leftrightarrow (t-2)(t-1)\geq 0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2\left(x^2-x+1\right)}{x^2}\geq 0 \quad [*].$$

Dễ nhận thấy $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên [*] nghiệm đúng với mọi giá trị $x\neq 0$.
Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x\neq 0$.

Nhận xét.
Các phương trình – bất phương trình trên tiếp nối lớp bài toán giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ một biến thông thường. Một số ví dụ đã sử dụng các phép biến đổi với hằng số hoặc biểu thức nhằm giấu đi bản chất thực của bài toán. Ngoài ra các bạn có thể giải bài toán bằng cách biến đổi tương đương, đưa về phương trình bậc bốn, sử dụng hệ số bất định phân tích đa thức thành nhân tử, vấn đề này tác giả xin trình bày sau.

Xin lưu ý với các bài toán có chứa ẩn phụ dạng $t=ax+\dfrac{b}{x}\Rightarrow t^2=a^2x^2+\dfrac{b^2}{x^2}+2ab$.

Đối với các bài toán giải phương trình – bất phương trình việc thay thế ẩn phụ hoàn toàn đơn giản, tuy nhiên đối với các bài toán biện luận chứa tham số, thao tác chặn miền của biến phụ là vô cùng cần thiết, quyết định kết quả cuối cùng.

Tuy nhiên với các bài toán giải cơ bản như trên, việc chặn miền chặt của biến phụ sẽ giúp loại nghiệm ngoại lai và giảm thiểu các trường hợp phức tạp đối với bất phương trình. Lấy ví dụ điển hình bài toán 197, các bạn có thể tìm biến theo một trong các phương án sau

1. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM (Cauchy).

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\geq 2\sqrt{x^2.\dfrac{1}{x^2}}+2=4\Rightarrow |t|\geq 2$.

2. Sử dụng hằng đẳng thức.

Ta có $t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2=\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2}+4=\dfrac{\left(x^2-1\right)^2}{x^2}+4\geq 4\Rightarrow |t|\geq 2$.

3. Sử dụng phương trình bậc hai

Ta có $t^2-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}=m$, *suy ra* $x^4-mx^2+1=0\Leftrightarrow t^2-mt+1=0 \quad \left(t=x^2\right),[*]$.

Để tồn tại x thì [*] cần có ít nhất một nghiệm $t=x^2$ *không âm. Dễ thấy phương trình có tích hai nghiệm bằng 1 (dương) nên nếu* $m<0$ *thì [*] có hai nghiệm* $t=x^2$ *cùng âm, tức là vô nghiệm x.*

Như vậy $\begin{cases}m>0\\ \Delta\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m^2-4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m\geq 2\vee m\leq -2\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 2$. *Từ đây suy ra* $t^2\geq 4\Leftrightarrow |t|\geq 2$.

Tùy theo khả năng riêng của mình, các bạn có thể lựa chọn cho mình cách làm phù hợp.

Bài toán 198. Giải phương trình $x^2+\dfrac{1}{4x^2}=3\left(x+\dfrac{1}{2x}-1\right) \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Đặt $x + \frac{1}{2x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{4x^2} + 2x.\frac{1}{2x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4x^2} = t^2 - 1$.

Phương trình đã cho tương tương với $t^2 - 1 = 3t - 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

- Với $t = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 0$. Phương trình này vô nghiệm vì $\Delta < 0$.
- Với $t = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Đối chiếu điều kiện, suy ra phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Bài toán 199. Giải bất phương trình $4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4x + \frac{2}{x} \geq 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(2x - \frac{1}{x}\right) + 1 \geq 0$.

Đặt $2x - \frac{1}{x} = t$ ta thu được $t^2 - 2t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$. Kết luận tập nghiệm $x \neq 0$.

Bài toán 200. Giải phương trình $\left(2x - \frac{1}{x} + 5\right)\left(4x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right) = 36 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Đặt $2x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = 4x^2 + \frac{1}{x^2} - 2.2x.\frac{1}{x} \Rightarrow 4x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(t+5)(t^2+5) = 36 \Leftrightarrow t^3 + 5t^2 + 5t - 11 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 6t + 11) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 + 6t + 11 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

- Phương trình (*) vô nghiệm do $\Delta < 0$.
- Với $t = 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.

Bài toán 201. Giải bất phương trình $\left(x - \frac{1}{x} - 4\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\right) > 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Đặt $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(t-4)(t-2) > 3 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 - 3 > 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5) > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x} - 1\right)\left(x - \frac{1}{x} - 5\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)(x^2 - 5x - 1) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{5-\sqrt{29}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{5+\sqrt{29}}{2}$$

Kết luận tập nghiệm $S=\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{5-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$.

Bài toán 202. Giải phương trình $x^3+\frac{1}{x^3}=78\left(x+\frac{1}{x}\right)\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 0$.

Đặt $x+\frac{1}{x}=t\Rightarrow t^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$

Phương trình đã cho trở thành $t^3-3t=78t\Leftrightarrow t\left(t-9\right)\left(t+9\right)=0\Leftrightarrow t=0;t=9;t=-9$.

- ✓ Với $t=0\Rightarrow x^2=-1$. Phương trình này vô nghiệm.
- ✓ Với $t=9\Rightarrow x^2-9x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{9+\sqrt{77}}{2};x=\frac{9-\sqrt{77}}{2}$.
- ✓ Với $t=-9\Rightarrow x^2+9x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{-9+\sqrt{77}}{2};x=\frac{-9-\sqrt{77}}{2}$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm như trên.

Bài toán 203. Giải phương trình $x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)=18\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 0$.

Đặt $x+\frac{1}{x}=t\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2;x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$. Phương trình khi đó trở thành

$$t^3-3t+3\left(t^2-2\right)+5t=18\Leftrightarrow t^3+3t^2+2t-24=0\Leftrightarrow\left(t-2\right)\left(t^2+5t+12\right)=0.$$

- ❖ $t^2+5t+12=0,\Delta<0$ nên phương trình này vô nghiệm.
- ❖ $t=2\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 204. Giải bất phương trình $3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+10\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\geq 0\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 0$.

Đặt $x+\frac{1}{x}=t\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$3\left(t^3-3t\right)+10t-4\geq 0\Leftrightarrow 3t^3+t-4\geq 0\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(3t^2+3t+4\right)\geq 0\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(12t^2+12t+16\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left[3\left(2t+1\right)^2+13\right]\geq 0\Leftrightarrow t\geq 1\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}\geq 1\Leftrightarrow\frac{x^2-x+1}{x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{1}{4}.\frac{\left(2x-1\right)^2+1}{x}\geq 0\Leftrightarrow x>0$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x>0$.

Bài toán 205. Giải bất phương trình $4x^2+2x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6<0\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Đặt $2x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = 4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$.

Bất phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 4 + t - 6 < 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 < 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{x} - 1\right)\left(2x - \frac{1}{x} + 2\right) < 0 \Leftrightarrow \left(2x^2 - x - 1\right)\left(2x^2 + 2x - 1\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq x \leq 1 \end{array}\right.$$

Kết luận bất phương trình có nghiệm như trên.

Bài toán 206. Giải phương trình $8x^3 - \frac{1}{x^3} - 4\left(2x - \frac{1}{x}\right) = 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Đặt $t = 2x - \frac{1}{x} \Rightarrow t^3 = 8x^3 - \frac{1}{x^3} - 6\left(2x - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow 8x^3 - \frac{1}{x^3} = t^3 + 6t$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$t^3 + 6t - 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2 + t + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t^2 + t + 3 = 0 \qquad [*] \end{array}\right.$$

- Phương trình [*] vô nghiệm vì $\Delta < 0$.
- $t = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\frac{1}{2}; x = 1$.

Bài toán 207. Giải phương trình $\frac{(1+x)^3}{3x+1} + \frac{x^3 + 5x + 2}{x^3 + 2x + 1} = x + 3 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3x + 1 \neq 0; x^3 + 2x + 1 \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3x+1} - x + \frac{x^3 + 5x + 2}{x^3 + 2x + 1} - 1 = 2 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x + 1}{3x+1} + \frac{3x+1}{x^3 + 2x + 1} = 2.$$

Đặt $\frac{x^3 + 2x + 1}{3x+1} = t$ ta có $t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 = 3x + 1 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$.

Kết luận tập nghiệm $S = \{-1; 0; 1\}$.

Bài toán 208. Giải phương trình $\frac{x^3 - x^2 + 1}{x} + \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x + 1} = 2 - x \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0; x^3 + x + 1 \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{x} + x + 1 + \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x + 1} - 1 = 2 \Leftrightarrow \frac{x^3 + x + 1}{x} + \frac{x}{x^3 + x + 1} = 2.$$

Đặt $\frac{x^3+x+1}{x}=t$ ta thu được $t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow\frac{(t-1)^2}{t}=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x^3+x+1=x\Leftrightarrow x=-1$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Bài toán 209. Giải phương trình $\frac{x^3-x^2+x}{x^2+2x+1}+\frac{x^3+x^2+5x+2}{x^3+3x+1}=2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq-1; x^3+3x+1\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3-x^2+x}{x^2+2x+1}+1+\frac{x^3+x^2+5x+2}{x^3+3x+1}-1=2\Leftrightarrow\frac{x^3+3x+1}{x^2+2x+1}+\frac{x^2+2x+1}{x^3+3x+1}=2.$$

Đặt $\frac{x^3+3x+1}{x^2+2x+1}=t$ ta thu được $t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow\frac{(t-1)^2}{t}=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x^3+3x+1=x^2+2x+1\Leftrightarrow x\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$.
So sánh điều kiện, kết luận tập nghiệm $S=\{0\}$.

Bài toán 210. Giải bất phương trình $\frac{x(x+3)}{x^2+2}+\frac{2x^3+4x^2+2x+2}{2x^2+3x+2}\le 1+x \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x(x+3)}{x^2+2}+1+\frac{2x^3+4x^2+2x+2}{2x^2+3x+2}-x\le 2\Leftrightarrow\frac{2x^2+3x+2}{x^2+2}+\frac{x^2+2}{2x^2+3x+2}\le 2.$$

Đặt $\frac{2x^2+3x+2}{x^2+2}=t$ ta thu được $t+\frac{1}{t}\le 2\Leftrightarrow\frac{(t-1)^2}{t}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t<0\end{array}\right.$

- $t=1\Leftrightarrow 2x^2+3x+2=x^2+2\Leftrightarrow x(x+3)=0\Leftrightarrow x\in\{-3;0\}$.
- $t=\frac{2x^2+3x+2}{x^2+2}=\frac{1}{8}.\frac{16x^2+24x+16}{x^2+2}=\frac{1}{8}.\frac{(4x+3)^2+7}{x^2+2}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x\in\{-3;0\}$.

Bài toán 211. Giải phương trình $\frac{4}{x^2}+\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x}-x=1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 0$. Đặt $\frac{2}{x}-\frac{x}{2}=t\Rightarrow t^2=\frac{4}{x^2}+\frac{x^2}{4}-2$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$t^2+2t+1=0\Leftrightarrow(t+1)^2=0\Leftrightarrow t=-1\Leftrightarrow\frac{2}{x}-\frac{x}{2}=-1\Leftrightarrow x^2-2x-4=0\Leftrightarrow x\in\left\{1+\sqrt{5};1-\sqrt{5}\right\}.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Nhận xét.
Lớp bài toán bậc cao kết hợp chứa ẩn ở mẫu rất đa dạng và phong phú, bằng cách dùng một ẩn phụ chứa bậc cao bất kỳ ghép thành phương trình, kết hợp các phép biến đổi thêm bớt hạng tử, biểu thức, nhân chia thêm hằng số, các bạn có thể tạo ra nhiều bài toán phức tạp và thú vị đến bất ngờ. Các ví dụ trên đây, từ 187 đến 211 chỉ là những điển hình phổ biến, mang tính sơ lược cho kỹ thuật đặt ẩn phụ chứa phân thức, tác giả sắp xếp lớp bài toán này nhằm đặt nền tảng cho lớp phương trình – bất phương trình hệ số đối xứng, hồi quy; đặt ẩn phụ đưa về phương trình đồng bậc và một số dạng khác ở các phần sau, mong các bạn chú ý.

Đối với các bài toán chứa bậc ba phân thức các bạn lưu ý các hằng đẳng thức quen thuộc

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 = a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3 = a^3-b^3-3a^2b+3ab^2 = a^3-b^3-3ab(a-b)$$

Bài toán 212. Giải phương trình $x^2+4x+\dfrac{1}{x^2+4x+5}+\dfrac{5}{2}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x^2+4x+5=t$ ta thu được

$$t-5+\frac{1}{t}+\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow (t-2)(2t-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2+4x+3)(2x^2+8x+9)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)\left[2(x+2)^2+1\right]=0 \Leftrightarrow x\in\{-3;-1\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm như trên.

Bài toán 213. Giải phương trình $x(x+2)+\dfrac{3}{(x-1)(x+3)}=7 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\notin\{-3;1\}$. Phương trình đã cho tương đương với $x^2+2x+\dfrac{3}{x^2+2x-3}=7$.

Đặt $x^2+2x-3=t$ ta thu được

$$t+\frac{3}{t}=4 \Leftrightarrow (t-1)(t-3)=0 \Leftrightarrow (x^2+2x-4)(x^2+2x-6)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-1+\sqrt{5};-1-\sqrt{5};-1+\sqrt{7};-1-\sqrt{7}\right\}.$$

Kết hợp điều kiện suy ra phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Bài toán 214. Giải bất phương trình $(x+2)^2+\dfrac{2}{(x+1)(x+3)+3}\le 1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^2+4x+6+\dfrac{2}{x^2+4x+6}\le 3$.

Đặt $x^2+4x+6=t \Rightarrow t=(x+2)^2+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$t+\frac{2}{t}\le 3 \Leftrightarrow \frac{t^2-3t+2}{t}\le 0 \Leftrightarrow 1\le t\le 2 \Rightarrow t=2 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2.$$

Kết luận nghiệm $S=\{-2\}$.

Bài toán 215. Giải phương trình $(x-1)^2+\dfrac{3}{x(2-x)+3}=\dfrac{3}{4} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x-x^2+3\ne 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2-2x+1-\dfrac{3}{x^2-2x-3}=\dfrac{3}{4}$.

Đặt $x^2-2x-3=t$ thu được $t+4-\dfrac{3}{t}=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow t-\dfrac{3}{t}+\dfrac{13}{4}=0 \Leftrightarrow 4t^2+13t-12=0 \Leftrightarrow t\in\left\{\dfrac{3}{4};-4\right\}$.

- $t=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow x^2-2x-\dfrac{15}{4}=0\Leftrightarrow x\in\left\{1-\dfrac{\sqrt{19}}{2};1+\dfrac{\sqrt{19}}{2}\right\}$.
- $t=-4\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S=\left\{1-\dfrac{\sqrt{19}}{2};1;1+\dfrac{\sqrt{19}}{2}\right\}$.

Bài toán 216. Giải phương trình $\dfrac{1}{x^3-2x+1}+x^3-2x=1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x^3-2x+1\neq 0$.
Đặt $x^3-2x+1=t, t\neq 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{t}+t-1=1\Leftrightarrow (t-1)^2=0\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow x^3-2x=0\Leftrightarrow x(x^2-2)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\right\}.$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm $x=-\sqrt{2};x=0;x=\sqrt{2}$.

Bài toán 217. Giải phương trình $\dfrac{2}{(x-1)^3+1}+x(x^2-3x+3)=3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 0$.
Biến đổi phương trình đã cho về dạng $\dfrac{2}{(x-1)^3+1}+(x-1)^3=2$

Đặt $(x-1)^3+1=t$ thu được

$$\frac{2}{t}+t-1=2\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^3=0\\ (x-1)^3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện ta được hai nghiệm $x=1;x=2$.

Bài toán 218. Giải phương trình $\dfrac{6}{(x+1)^3+4}+x(x^2+3x+3)=2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $(x+1)^3+4\neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương $\dfrac{6}{(x+1)^3+4}+(x+1)^3=3$.

Đặt $(x+1)^3+4=t$ thu được

$$\frac{6}{t}+t-4=3\Leftrightarrow t^2-7t+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=6\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^3=-3\\ (x-1)^3=2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt[3]{3}\\ x=1+\sqrt[3]{2}\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm như trên.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\frac{x^2+1}{3x}+\frac{3x}{x^2+1}=\frac{5}{2}$.
2. $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}<2$.
3. $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.
4. $\frac{x^2+x+5}{2x+1}+\frac{5(2x+1)}{x^2+x+5}>6$.
5. $\frac{x^2+3x}{1+x}+\frac{3+3x}{x^2+4x+1}\le 3$.
6. $\frac{2x^2-x-1}{x+4}+\frac{5(x+4)}{2x^2+x+7}-4\le 0$.
7. $\frac{8x+3}{2x^2+3}+3.\frac{2x^2+3}{(1+x)(3+x)}\le 4$.
8. $\frac{x^4}{2x^2+1}+\frac{2x^2+1}{x^4}=2$.
9. $\frac{x^3-2x^2-2x}{2x+5}+\frac{4(2x+5)}{x^3+5x+5}\le 4-x$.
10. $\frac{5x^3+x^2+x+1}{4x^2+1}+6.\frac{4x^2+1}{x^3+x^2+1}>x+7$.
11. $4x^2+\frac{4}{x^2}=x+\frac{1}{x}+6$.
12. $x^2-x+\frac{1}{(2x-1)^2}=\frac{19}{9}$.
13. $2x^2-24x-\frac{1}{(6-x)^2}\le 71$.
14. $\frac{4}{x(x-6)}\le 14-(x-3)^2$.
15. $x(x^2-2)+\frac{1}{x^3-2x+1}\ge 1$.
16. $\frac{1}{(x+4)^2}+5(1+x)(3+x)>2$.
17. $\frac{1}{x^3+3x-4}+(x-2)(x^2+2x+7)\le -8$.
18. $10x-10x^2+\frac{1}{(2x-1)^2+2}>3$.
19. $(x-1)(x^2+x+2)+\frac{8}{x^3+x+2}=2$.
20. $(x-1)(2x^2+x+1)+\frac{12}{2x^3-x^2+3}=3$.

21. $\dfrac{1}{x^3+x^2+x-3}+(x-3)(x^2+4x+13)+34\geq 0$.

22. $x^3+\dfrac{1}{x^3}+4\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2=0$.

23. $x^2+\dfrac{1}{x^2}+10=6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

24. $x^4+\dfrac{1}{x^4}+12=7\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

25. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}-1\right)=2$.

26. $\left(x-\dfrac{3}{x}-1\right)\left(x^2+\dfrac{9}{x^2}+3\right)+39=0$.

27. $\left(\dfrac{2}{x}-3x-1\right)\left(\dfrac{4}{x^2}+9x^2-1\right)+24<0$.

28. $\left(x-\dfrac{1}{x}+1\right)\left(3x^2+\dfrac{3}{x^2}-1\right)=5$.

29. $\left(3x+\dfrac{1}{x}-3\right)\left(9x^2+\dfrac{1}{x^2}+1\right)\leq 11$.

30. $x^3+\dfrac{8}{x^3}=3x+\dfrac{6}{x}$.

31. $x^3+\dfrac{1}{x^3}\leq 6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

32. $4\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+13\left(x+\dfrac{1}{x}\right)>5$.

33. $\dfrac{x^3}{8}+\dfrac{8}{x^3}-4\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)+6=0$.

34. $\dfrac{x^3}{27}+\dfrac{8}{x^3}+6\leq 5\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{x}\right)$.

35. $8x^3+\dfrac{1}{x^3}+7\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)\leq 0$.

36. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{11}{2}=5\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{3}{x}\right)$.

37. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}+\dfrac{3x^2-3x-5}{x(x+1)}+2=0$.

38. $x^3+\dfrac{8}{x^3}+7\left(x+\dfrac{2}{x}\right)<2$.

39. $\left(16x^2+\dfrac{9}{x^2}\right)\left(4x+\dfrac{3}{x}\right)>175$.

40. $4\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+13\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\leq 0$.

Bài toán 219. Giải phương trình $\frac{3x}{x^2+x+1}+\frac{5x}{x^2+3x+1}=2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+3x+1\neq 0$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$, phương trình đã cho trở thành $\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{x^2+x+1}{x}}+\frac{\frac{5x}{x}}{\frac{x^2+3x+1}{x}}=2\Leftrightarrow \frac{3}{x+\frac{1}{x}+1}+\frac{5}{x+\frac{1}{x}+3}=2$.

Đặt $x+\frac{1}{x}+1=t$ thu được

$$\frac{3}{t}+\frac{5}{t+2}=2\Leftrightarrow 3t+6+5t=2t^2+4t\Leftrightarrow 2t^2-4t-6=0\Leftrightarrow t^2-2t-3=0\Leftrightarrow (t-3)(t+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}+2\right)=0\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)^2=0\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x=-1; x=1$.

Bài toán 220. Giải phương trình $\frac{2x}{3x^2-5x+2}+\frac{13x}{3x^2+x+2}=6 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\notin\left\{\frac{2}{3};1\right\}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x(3x^2+x+2)+13x(3x^2-5x+2)=6(3x^2+x+2)(3x^2-5x+2)$$

$$\Leftrightarrow 54x^4-117x^3+105x^2-78x+24=0\Leftrightarrow 18x^4-39x^3+35x^2-26x+8=0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2(3x^2-x+2)-11x(3x^2-x+2)+4(3x^2-x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow (6x^2-11x+4)(3x^2-x+2)=0\Leftrightarrow (2x-1)(3x-4)(3x^2-x+2)=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S=\left\{\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\notin\left\{\frac{2}{3};1\right\}$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$, phương trình đã cho trở thành $\frac{2}{3x-5+\frac{2}{x}}+\frac{13}{3x+1+\frac{2}{x}}=6$.

Đặt $3x-5+\frac{2}{x}=t$ ta thu được

$$\frac{2}{t}+\frac{13}{t+6}=6\Leftrightarrow 2t+12+13t=6t(t+6)\Leftrightarrow 2t^2+7t-4=0\Leftrightarrow (2t-1)(t+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (6x^2-11x+4)(3x^2-x+2)=0\Leftrightarrow (2x-1)(3x-4)\left[5x^2+(x-1)^2+3\right]\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm.

Bài toán 221. Giải phương trình $\dfrac{2x}{x^2+x+3}+\dfrac{3x}{(x+1)^2+2}=\dfrac{9}{10}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{2x}{x^2+x+3}+\dfrac{3x}{x^2+2x+3}=\dfrac{9}{10}$ $\quad [1]$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$ thì [1] trở thành $\dfrac{2}{\dfrac{x^2+x+3}{x}}+\dfrac{3}{\dfrac{x^2+2x+3}{x}}=\dfrac{9}{10}\Leftrightarrow \dfrac{2}{x+\dfrac{3}{x}+1}+\dfrac{3}{x+\dfrac{3}{x}+2}=\dfrac{9}{10}$ $\quad [2]$

  Đặt $x+\dfrac{3}{x}+1=t$ ta có

  $$[2]\Leftrightarrow \frac{2}{t}+\frac{3}{t+1}=\frac{9}{10}\Leftrightarrow 9t^2-41t-20=0\Leftrightarrow (t-5)(9t+4)=0\Leftrightarrow (x^2-4x+3)(9x^2+13x+27)=0.$$

  Phương trình $9x^2+13x+27=0$ vô nghiệm.
  Với $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1;x=3$. Do đó $S=\{1;3\}$ là tập nghiệm.

Bài toán 222. Giải phương trình $\dfrac{3}{(2x+1)(x+6)}+\dfrac{5}{(x+2)(2x+3)}=\dfrac{10}{21x}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\notin\left\{-6;-3;-2;-\dfrac{1}{2};0\right\}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{2x^2+13x+6}+\frac{5}{2x^2+7x+6}=\frac{10}{21x}\Leftrightarrow \frac{3}{\dfrac{2x^2+13x+6}{x}}+\frac{5}{\dfrac{2x^2+7x+6}{x}}=\frac{10}{21}\Leftrightarrow \frac{3}{2x+\dfrac{6}{x}+13}+\frac{5}{2x+\dfrac{6}{x}+7}=\frac{10}{21}\quad (1).$$

Đặt $2x+\dfrac{6}{x}+7=t$; phương trình (1) trở thành

$$\frac{3}{t+6}+\frac{5}{t}=\frac{10}{21}\Leftrightarrow 10t^2-108t-630=0\Leftrightarrow (5t+21)(t-15)=0\Leftrightarrow \left(2x+\frac{6}{x}+28\right)\left(2x+\frac{6}{x}-8\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+14x+3)(x^2-4x+3)=0\Leftrightarrow x=1;x=3;x=-7-\sqrt{46};x=-7+\sqrt{46}$$

Các nghiệm đều thỏa mãn điều kiện ban đầu.
Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{1;3;-7-\sqrt{46};-7+\sqrt{46}\right\}$.

Bài toán 223. Giải phương trình $\dfrac{5}{x^2+x+1}+\dfrac{8}{x^2-4x+1}+\dfrac{7}{3x}=0$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x^2-4x+1\neq 0;x\neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{5}{x+1+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{8}{x-4+\dfrac{1}{x}}+\dfrac{7}{3}=0$. Đặt $x-4+\dfrac{1}{x}=t$ ta thu được

$$\frac{5}{t+5}+\frac{8}{t}+\frac{7}{3}=0\Leftrightarrow 3\left(5t+8t+40\right)+7\left(t^2+5t\right)\Leftrightarrow 7t^2+74t+120=0\Leftrightarrow \left(t+2\right)\left(7t+60\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(7x+\frac{7}{x}+32\right)=0\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(7x^2+32x+7\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{1;\frac{-16-3\sqrt{23}}{7};\frac{-16+3\sqrt{23}}{7}\right\}$$

So sánh điều kiện, kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm như trên.

Nhận xét.

Hình thức các bài toán từ 219 đến 223 có dạng tổng quát

$$\frac{mx}{ax^2+bx+c}+\frac{nx}{ax^2+dx+c}=p\quad [i]\vee\frac{m}{ax^2+bx+c}+\frac{n}{ax^2+dx+c}=\frac{p}{x}\qquad [ii]$$

trong đó a,b,c,d,m,n,p là các hằng số thực.

Cách giải về cơ bản vẫn là đặt một ẩn phụ thuần túy, đối với các bài toán có hình thức $[i]$ các bạn chú ý xét trường hợp $x=0$ trước khi thực hiện chia cả tử số và mẫu số của mỗi phân thức cho x.

$$\frac{mx}{ax^2+bx+c}+\frac{nx}{ax^2+dx+c}=p\Rightarrow\frac{m}{\frac{ax^2+bx+c}{x}}+\frac{n}{\frac{ax^2+dx+c}{x}}=p\Rightarrow\frac{m}{ax+\frac{c}{x}+b}+\frac{n}{ax+\frac{c}{x}+d}=p$$

Các bạn có thể nhận thấy điểm mấu chốt của lớp bài toán dạng này là phức tạp hóa ẩn x thông thường bởi một biến phụ t phức tạp hơn, cụ thể là dạng $t=ax+\frac{c}{x}$ như ở trên, sau khi thay thế trả lại sẽ làm mất đi x dưới mẫu thức, sử dụng các biến đổi đại số làm ẩn giấu đi bản chất thực vốn có của nó.

Một số mở rộng (chỉ đơn thuần là ghép thêm hệ số) như sau

$$\frac{mx}{ax^2+bx+c}+\frac{nx}{kax^2+dx+kc}=p\qquad [iii]$$

$$\frac{m}{ax^2+bx+c}+\frac{n}{kax^2+dx+kc}=\frac{p}{x}\qquad [iv]$$

$$\frac{k_1ax^2+ex+k_1c}{ax^2+bx+c}+\frac{k_3ax^2+mx+k_3c}{k_2ax^2+dx+k_2c}=p\quad [v]$$

Ngoài ra có thể phức tạp hóa x bởi các biểu thức chứa x: $x-1;2x-1;3x-2;x^2;x^2-2x...$

Thành thử khi đó để nhìn ra bản chất bài toán cần có kinh nghiệm và cảm quan nhất định.

Bài toán 224. Giải phương trình $\frac{3}{\left(2x+1\right)^2+4}+\frac{5}{\left(2x-1\right)^2+4}=\frac{16}{13x}\qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 0$.

Biến đổi phương trình $\frac{3x}{4x^2+4x+5}+\frac{5x}{4x^2-4x+5}=\frac{16}{13}\Leftrightarrow\frac{3}{4x+\frac{5}{x}+4}+\frac{5}{4x+\frac{5}{x}-4}=\frac{16}{13}$. Đặt $4x+\frac{5}{x}=t$ ta được

$$\frac{3}{t+4}+\frac{5}{t-4}=\frac{16}{13}\Leftrightarrow 13\left(3t-12+5t+20\right)=16\left(t^2-16\right)\Leftrightarrow 16t^2-104t-360=0$$

$$\Leftrightarrow\left(t-9\right)\left(2t+5\right)=0\Leftrightarrow\left(4x+\frac{5}{x}-9\right)\left(8x+\frac{10}{x}+5\right)=0\Leftrightarrow\left(4x^2-9x+5\right)\left(8x^2+5x+10\right)=0\Rightarrow x\in\left\{1;\frac{5}{4}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $S=\left\{1;\frac{5}{4}\right\}$.

Bài toán 225. Giải phương trình $\dfrac{4}{x^2-6x+1}+\dfrac{7}{x^2+1}=\dfrac{5}{2x}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-6x+1\neq 0; x\neq 0$.

Biến đổi $\dfrac{4x}{x^2-6x+1}+\dfrac{7x}{x^2+1}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow \dfrac{4}{x+\dfrac{1}{x}-6}+\dfrac{7}{x+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{5}{2}$. Đặt $x+\dfrac{1}{x}-6=t$ ta được

$$\frac{4}{t}+\frac{7}{t+6}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2(4t+24+7t)=5t(t+6)\Leftrightarrow 5t^2+8t-48=0\Leftrightarrow (5t-12)(t+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(5x+\frac{5}{x}-42\right)\left(x+\frac{1}{x}-2\right)=0\Leftrightarrow (5x^2-42x+5)(x-1)^2=0\Leftrightarrow x\in\left\{1;\frac{21-4\sqrt{26}}{5};\frac{21+4\sqrt{26}}{5}\right\}$$

Kết hợp điều kiện, phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{1;\dfrac{21-4\sqrt{26}}{5};\dfrac{21+4\sqrt{26}}{5}\right\}$.

Bài toán 226. Giải phương trình $\dfrac{5x-5}{x^2-4x+6}+\dfrac{6x-6}{x^2-5x+7}=\dfrac{17}{2}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Dễ thấy $x=1$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Đặt $x-1=y$, biến đổi

$$\frac{5y}{(y+1)^2-4(y+1)+6}+\frac{6y}{(y+1)^2-5(y+1)+7}=\frac{17}{2}\Leftrightarrow \frac{5y}{y^2-2y+3}+\frac{6y}{y^2-3y+3}=\frac{17}{2}\Leftrightarrow \frac{5}{y+\dfrac{3}{y}-2}+\frac{6}{y+\dfrac{3}{y}-3}=\frac{17}{2}.$$

Đặt $y+\dfrac{3}{y}-3=t$ thu được hệ quả

$$\frac{5}{t+1}+\frac{6}{t}=\frac{17}{2}\Leftrightarrow 2(11t+6)=17t^2+17t\Leftrightarrow 17t^2-5t-12=0\Leftrightarrow (t-1)(17t+12)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(y+\frac{3}{y}-4\right)\left(17y+\frac{51}{y}-39\right)=0\Leftrightarrow (y-1)(y-3)(17y^2-39y+51)=0\Rightarrow y\in\{1;3\}\Leftrightarrow x\in\{2;4\}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{2;4\}$.

Bài toán 227. Giải phương trình $\dfrac{x^2+5x+2}{x^2+2}+\dfrac{x^2+9x+2}{x^2+3x+2}=\dfrac{14}{3}\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\notin\{-2;-1\}$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình ban đầu.
- Xét $x\notin\{0;-2;-1\}$, phương trình đã cho trở thành $\dfrac{x+\dfrac{2}{x}+5}{x+\dfrac{2}{x}}+\dfrac{x+\dfrac{2}{x}+9}{x+\dfrac{2}{x}+3}=\dfrac{14}{3}$. Đặt $x+\dfrac{2}{x}=t$ ta có

$$\frac{t+5}{t}+\frac{t+9}{t+3}=\frac{14}{3}\Leftrightarrow 3(t^2+8t+15+t^2+9t)=14t(t+3)$$

$$\Leftrightarrow 8t^2-9t-45=0\Leftrightarrow (t-3)(8t+15)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{2}{x}-3\right)\left(8x+\frac{16}{x}+15\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x-2)\left(8x^2+15x+16\right)=0\Rightarrow x\in\{1;2\}$$

Kết hợp điều kiện suy ra tập hợp nghiệm $S=\{1;2\}$.

Bài toán 228. Giải phương trình $\dfrac{x^2+4x+7}{(x+1)^2+6}+\dfrac{(2x+1)^2+27}{(x-1)(x-7)}+\dfrac{137}{15}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq1;x\neq7$.

- ✓ Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- ✓ Xét $x\notin\{0;1;7\}$, biến đổi $\dfrac{x^2+4x+7}{x^2+2x+7}+\dfrac{4x^2+4x+28}{x^2-8x+7}+\dfrac{137}{15}=0\Leftrightarrow\dfrac{x+4+\frac{7}{x}}{x+2+\frac{7}{x}}+4.\dfrac{x+1+\frac{7}{x}}{x-8+\frac{7}{x}}+\dfrac{137}{15}=0$

.

Đặt $x+\dfrac{7}{x}-8=t$ thu được $\dfrac{t+12}{t+10}+\dfrac{4t+36}{t}+\dfrac{137}{15}=0\Leftrightarrow212t^2+2690t+5400=0\Leftrightarrow(2t+5)(53t+540)=0$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2-11x+14\right)\left(53x^2+371x+116\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(2x-7)(x-2)=0\\ \left(53x^2+371x+116\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-371-\sqrt{113049}}{106};\frac{-371+\sqrt{113049}}{106};2;\frac{7}{2}\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Bài toán 229. Giải phương trình $\dfrac{9\left(x^2+x+1\right)}{x^2-x+1}=\dfrac{7(x+1)}{x-1} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$9\left(x^2+x+1\right)(x-1)=7(x+1)\left(x^2-x+1\right)\Leftrightarrow9\left(x^3-1\right)=7\left(x^3+1\right)\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2.$$

Kết luận nghiệm $S=\{2\}$.

Bài toán 230. Giải phương trình $\dfrac{4x-8}{x^2-10x+18}+\dfrac{7x-14}{x^2-4x+6}=1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-10x+18\neq0$.

- Nhận xét $x=2$ không là nghiệm của phương trình ban đầu.
- Với $x\neq2$, đặt $x-2=y$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\frac{4y}{(y+2)^2-10(y+2)+18}+\frac{7y}{(y+2)^2-4(y+2)+6}=1\Leftrightarrow\frac{4y}{y^2-6y+2}+\frac{7y}{y^2+2}=1\Leftrightarrow\frac{4}{y+\frac{2}{y}-6}+\frac{7}{y+\frac{2}{y}}=1.$$

Đặt $y+\dfrac{2}{y}-6=t$ ta có $\dfrac{4}{t}+\dfrac{7}{t+6}=1\Leftrightarrow11t+24=t^2+6t\Leftrightarrow t^2-5t-24=0\Leftrightarrow(t+3)(t-8)=0$

$$\Leftrightarrow\left(y+\frac{2}{y}-3\right)\left(y+\frac{2}{y}-14\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(y-1)(y-2)=0\\ y^2-14y+2=0\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow y\in\left\{1;2;7+\sqrt{47};7-\sqrt{47}\right\}\Rightarrow x\in\left\{3;4;9+\sqrt{47};9-\sqrt{47}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{3;4;9+\sqrt{47};9-\sqrt{47}\right\}$.

Bài toán 231. Giải phương trình $\dfrac{x^4+3x^2+1}{x^3+x^2-x}=3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\left(x^2+x-1\right)\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x^2}+3}{x-\dfrac{1}{x}+1}=3 \qquad [1]$

Đặt $x-\dfrac{1}{x}=t\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2+2$. Khi đó $[1]\Leftrightarrow t^2+5=3(t+1)\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow(t-1)(t-2)=0$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}-1\right)\left(x-\frac{1}{x}-2\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-2x-1\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2};1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right\}.$$

Kết hợp điều kiện suy ra phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Bài toán 232. Giải phương trình $\dfrac{x^6+x^4+x^2+1}{x^2\left(-3x^2+10x-3\right)}=1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\left(-3x^2+10x-3\right)\neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x^3+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+10}=1\Leftrightarrow\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+10}=1$.

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$ ta thu được

$$t^3-2t=-3t+10\Leftrightarrow t^3+t-10=0\Leftrightarrow(t-2)\left(t^2+2t+5\right)=0\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}-2\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận nghiệm $x=1$.

Bài toán 233. Giải phương trình $\dfrac{1}{4x^2-6x+3}+\dfrac{1}{4(x-1)^2}=\dfrac{8}{3(2x-1)} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq\dfrac{1}{2};x\neq 1;4x^2-6x+3\neq 0$.

Đặt $2x-1=y$, phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{(y+1)^2-3(y+1)+3}+\frac{1}{4\left(\dfrac{y+1}{2}-1\right)^2}=\frac{8}{3y}\Leftrightarrow\frac{y}{y^2-y+1}+\frac{y}{y^2-2y+1}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{y+\dfrac{1}{y}-1}+\frac{1}{y+\dfrac{1}{y}-2}=\frac{8}{3}.$$

Đặt $y+\frac{1}{y}-2=t$ ta thu được $\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow 3(2t+1)=8t(t+1)\Leftrightarrow 8t^2+2t-3=0\Leftrightarrow (2t-1)(4t+3)=0$

$$\Leftrightarrow\left(2y+\frac{2}{y}-5\right)\left(4y+\frac{4}{y}-5\right)\Leftrightarrow(2y-1)(y-2)(4y^2-5y+4)=0\Rightarrow y\in\left\{\frac{1}{2};2\right\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right\}.$$

Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 234. Giải phương trình $\frac{x^2-3x+5}{x^2-4x+5}+\frac{1}{4}=\frac{x^2-5x+5}{x^2-6x+5}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\notin\{1;5\}$.

- ❖ Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- ❖ Xét $x\neq 0$, biến đổi $\frac{x+\frac{5}{x}-3}{x+\frac{5}{x}-4}+\frac{1}{4}=\frac{x+\frac{5}{x}-5}{x+\frac{5}{x}-6}$. Đặt $x+\frac{5}{x}-6=t$ thu được

$$\frac{t+3}{t+2}+\frac{1}{4}=\frac{t+1}{t}\Leftrightarrow t(5t+14)=4(t+1)(t+2)\Leftrightarrow t^2+2t-8=0\Leftrightarrow(t-2)(t+4)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{5}{x}-8\right)\left(x+\frac{5}{x}-2\right)=0\Leftrightarrow(x^2-8x+5)(x^2-2x+5)=0\Leftrightarrow x\in\left\{4+\sqrt{11};4-\sqrt{11}\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 235. Giải phương trình $\frac{x^2+3x+3}{x^2-4x+3}+\frac{x^2+6x+3}{x^2+5x+3}=\frac{53}{12}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $(x^2-4x+3)(x^2+5x+3)\neq 0$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$, biến đổi $\frac{x+3+\frac{3}{x}}{x-4+\frac{3}{x}}+\frac{x+6+\frac{3}{x}}{x+5+\frac{3}{x}}=\frac{53}{12}$. Đặt $x-4+\frac{3}{x}=t$ thu được

$$\frac{t+7}{t}+\frac{t+10}{t+9}=\frac{53}{12}\Leftrightarrow 12(t^2+16t+63+t^2+10t)=53t(t+9)$$

$$\Leftrightarrow 29t^2+165t-756=0\Leftrightarrow t=3;t=-\frac{252}{29}$$

Với $t=3\Leftrightarrow x+\frac{3}{x}-7=0\Leftrightarrow x^2-7x+3=0\Rightarrow x=\frac{7+\sqrt{37}}{2};x=\frac{7-\sqrt{37}}{2}$.

Với $t=-\frac{252}{29}\Leftrightarrow 29x^2+136x+87=0\Leftrightarrow x=\frac{-68+\sqrt{2101}}{29};x=\frac{-68+\sqrt{2101}}{29}$.

Vậy phương trình ban đầu có bốn nghiệm.

Bài toán 236. Giải phương trình $\frac{x}{x^2+2}+\frac{3x^2+6}{x^2-x+2}=\frac{29}{6}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$, biến đổi $\dfrac{1}{x+\dfrac{2}{x}}+\dfrac{3\left(x+\dfrac{2}{x}\right)}{x-1+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{29}{6}$. Đặt $x+\dfrac{2}{x}=t$ thu được

$$\frac{1}{t}+\frac{3t}{t-1}=\frac{29}{6}\Leftrightarrow 6\left(3t^2+t-1\right)=29t\left(t-1\right)\Leftrightarrow 11t^2-35t+6=0\Leftrightarrow \left(t-3\right)\left(11t-2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)\left(11x^2-2x+22\right)=0\Leftrightarrow x=1;x=2$$

So sánh điều kiện ta có hai nghiệm như trên.

Bài toán 237. Giải phương trình $\dfrac{12}{x^2+2x+4}+\dfrac{11}{x^2+x+5}=\dfrac{2}{x-1}\qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện: vì $x^2+2x+4=\left(x+1\right)^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $x^2+x+5=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{19}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên ta có $x\neq 1$.

Đặt $x-1=t,\left(t\neq 0\right)$ thì phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{12t}{t^2+4t+7}+\frac{11t}{t^2+3t+7}=2\Leftrightarrow \frac{12}{t+4+\dfrac{7}{t}}+\frac{11}{t+3+\dfrac{7}{t}}=2\qquad (*).$$

Đặt $t+3+\dfrac{7}{t}=u$ thì (*) trở thành

$$\frac{12}{u+1}+\frac{11}{u}=2\Leftrightarrow 12u+11\left(u+1\right)=2u\left(u+1\right)\Leftrightarrow 2u^2-21u-11=0$$
$$\Leftrightarrow \left(u-11\right)\left(2u+1\right)=0\Leftrightarrow \left(t+3+\frac{7}{t}-11\right)\left(2t+6+\frac{14}{t}+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(t^2-8t+7\right)\left(2t^2+7t+14\right)=0\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(t-7\right)\left[2\left(t+\frac{7}{4}\right)^2+\frac{63}{8}\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\t=7\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=8\end{array}\right.$$

Đối chiếu, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x=2;x=8$.

Bài toán 238. Giải phương trình $\dfrac{5x}{x^2+3x+1}+\dfrac{1}{x}=3-x\qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\left(x^2+3x+1\right)\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{5}{x+3+\dfrac{1}{x}}+x+\dfrac{1}{x}=3$.

Đặt $x+\dfrac{1}{x}+3=t$ ta thu được

$$\frac{5}{t}+t-3=3\Leftrightarrow t^2-6t+5=0\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(t-5\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x+\frac{1}{x}+2\right)=0\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2=0\Leftrightarrow x\in\left\{-1;1\right\}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận tập nghiệm $S=\left\{-1;1\right\}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\dfrac{4x}{x^2-8x+7}+\dfrac{5x}{x^2-10x+7}+1=0$.
2. $\dfrac{3}{x^2-4x+1}-\dfrac{2}{x^2+x+1}=\dfrac{8}{3x}$.
3. $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$.
4. $\dfrac{6}{x^2+x+1}+\dfrac{8}{x^2-x+1}=\dfrac{10}{x}$.
5. $\dfrac{20x}{x^2+3x+4}=13-\dfrac{21x}{x^2-3x+4}$.
6. $\dfrac{3x}{x^2+x+5}=12+\dfrac{x^2+5}{x^2+3x+5}$.
7. $\dfrac{13}{2x^2+x+3}+\dfrac{2}{2x^2-5x+3}=\dfrac{6}{x}$.
8. $\dfrac{7x}{x^2+7x+1}+\dfrac{6x}{x^2+8x+1}=\dfrac{62}{45}$.
9. $\dfrac{2x}{3x^2-x+2}=1+\dfrac{7x}{3x^2+5x+2}$.
10. $\dfrac{3}{x^2-5x+5}+\dfrac{7}{x^2-x+1}+\dfrac{4}{x-1}=0$.
11. $\dfrac{4x}{x^2+10x+11}-\dfrac{5x}{x^2+12x+11}=-\dfrac{7}{264}$.
12. $\dfrac{3}{x^2+10x+5}+\dfrac{4}{x^2-18x+5}+\dfrac{7}{48x}=0$.
13. $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{4x}{x^2-12x+15}$.
14. $\dfrac{x^2-x+6}{x^2-5x+6}+\dfrac{x^2+x+6}{x^2-8x+6}+5=0$.
15. $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+3x+3}-\dfrac{(1+x)(3+x)}{x^2+5x+3}+\dfrac{2}{63}=0$.
16. $\dfrac{3x}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1}{x^2-9x+1}+\dfrac{25}{14}$.
17. $\dfrac{x-3}{2x^2-13x+22}-\dfrac{15x-45}{4x^2-15x+47}=\dfrac{11}{2}$.
18. $\dfrac{4x-4}{x^2-2x+3}+\dfrac{5x-5}{x^2+x}=8$.
19. $\dfrac{2x-6}{x^2-3x+6}+\dfrac{5x-15}{x^2-4x+9}=\dfrac{34}{45}$.
20. $\dfrac{5}{(x+2)^2+5}+\dfrac{3}{(x+1)(x+7)}=\dfrac{61}{112x}$.
21. $\dfrac{3x}{(x+1)(2x+12)}+\dfrac{5x}{(2x+3)(x+4)}=\dfrac{43}{140}$.

Bài toán 239. Giải phương trình $\left(x^2+5x+1\right)\left(x^2+x+1\right)=21x^2 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$; phương trình đã cho trở thành $\dfrac{x^2+5x+1}{x}.\dfrac{x^2+x+1}{x}=21\Leftrightarrow\left(x+5+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)=21$.

  Đặt $x+\dfrac{1}{x}+3=t$ ta thu được $(t+2)(t-2)=21\Leftrightarrow t^2-4=21\Leftrightarrow t^2=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\t=-5\end{array}\right.$

  Với $t=5\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}+3=5\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

  Với $t=-5\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}+3=-5\Leftrightarrow x^2+8x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4-\sqrt{15}\\x=-4+\sqrt{15}\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{-4-\sqrt{15};1;-4+\sqrt{15}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\left(x^2+1+5x\right)\left(x^2+1+x\right)=21x^2\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2+6x\left(x^2+1\right)-16x^2=0$ (1).

Đặt $x^2+1=t$ thì (1) trở thành

$$t^2+6tx-16x^2=0\Leftrightarrow t^2-2tx+8tx-16x^2=0\Leftrightarrow(t-2x)(t+8x)=0\Leftrightarrow(x-1)^2\left(x^2+8x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4-\sqrt{15}\\x=-4+\sqrt{15}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{-4-\sqrt{15};1;-4+\sqrt{15}\right\}$.

Nhận xét.

Vẫn nằm trong lớp bài toán đặt ẩn phụ, tuy có tinh tế hơn một chút ! Mấu chốt và điểm nhấn của các phương trình – bất phương trình loại này là phát hiện được phần chung nhau của các thừa số, từ đó suy ra cách đặt ẩn phụ. Đối với lời giải 1, khi chia đồng đều hai vế cho $x^2\neq 0$, lập tức xuất hiện nhân tử chung, và phép đặt ẩn trung bình cho chúng ta lời giải ngắn gọn, nhẹ nhàng. Đối với lời giải 2, thực chất chúng ta đã đưa bài toán về dạng đồng bậc, với hai ẩn x và $x^2+1=t$, sử dụng biệt thức của phương trình bậc hai để phân tích nhân tử. Về phương pháp sử dụng tính chất này, tác giả sẽ trình bày sâu hơn trong các phần tiếp theo.

Bài toán 240. Giải phương trình $\left(x^2-2x+4\right)\left(x^2+3x+4\right)=14x^2 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$; biến đổi $\dfrac{x^2-2x+4}{x}.\dfrac{x^2+3x+4}{x}=14\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{4}{x}-2\right)\left(x+\dfrac{4}{x}+3\right)=14$. Đặt $x+\dfrac{4}{x}-2=t$ ta có

  $$t(t+5)=14\Leftrightarrow(t-2)(t+7)=0\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{4}{x}-4\right)\left(x+\dfrac{4}{x}+5\right)=0\Leftrightarrow(x-2)^2(x+1)(x+4)=0\Leftrightarrow x\in\{-4;-1;1\}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm.

Bài toán 241. Giải phương trình $(x-1)(2x-3)(x+2)(x+3)=20x^2 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$; phương trình đã cho trở thành

$$\left[(2x-3)(x+2)\right]\left[(x-1)(x+3)\right]=20x^2 \Leftrightarrow \left(2x^2+x-6\right)\left(x^2+2x-3\right)=20x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+x-6}{x}.\frac{x^2+2x-3}{x}=20 \Leftrightarrow \left(2x-\frac{6}{x}+1\right)\left(x-\frac{3}{x}+2\right)=20 \qquad [1]$$

Đặt $x-\frac{3}{x}=t$ thì $[1]\Leftrightarrow (2t+1)(t+2)=20 \Leftrightarrow 2t^2+5t-18=0 \Leftrightarrow (t-2)(2t+9)=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{x}-2\right)\left(2x-\frac{6}{x}+9\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)\left(2x^2+9x-6\right)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-9+\sqrt{129}}{4};\frac{-9-\sqrt{129}}{4};-1;3\right\}$.

Vậy phương trình ban đầu có bốn nghiệm như trên, $S=\left\{\frac{-9+\sqrt{129}}{4};\frac{-9-\sqrt{129}}{4};-1;3\right\}$.

Bài toán 242. Giải phương trình $(x-8)(x-4)(x-2)(x-1)=4x^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$; phương trình đã cho trở thành

$$\left[(x-8)(x-1)\right]\left[(x-4)(x-2)\right]=4x^2 \Leftrightarrow \left(x^2-9x+8\right)\left(x^2-6x+8\right)=4x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9x+8}{x}.\frac{x^2-6x+8}{x}=4 \Leftrightarrow \left(x+\frac{8}{x}-9\right)\left(x+\frac{8}{x}-6\right)=4 \qquad [*]$$

Đặt $x+\frac{8}{x}-9=t$ thì $[*]\Leftrightarrow t(t+3)=4 \Leftrightarrow (t-1)(t+4)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{8}{x}-10\right)\left(x+\frac{8}{x}-5\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-10x+8\right)\left(x^2-5x+8\right)=0 \Leftrightarrow x\in\left\{5+\sqrt{17};5-\sqrt{17}\right\}$.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm, $S=\left\{5+\sqrt{17};5-\sqrt{17}\right\}$.

Bài toán 243. Giải phương trình $(x+2)(x-3)\left(x^2+2x-24\right)=16x^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$; phương trình đã cho trở thành

$$(x+2)(x-3)(x-4)(x+6)=16x^2 \Leftrightarrow \left[(x+2)(x+6)\right]\left[(x-3)(x-4)\right]=16x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+8x+12}{x}.\frac{x^2-7x+12}{x}=16 \Leftrightarrow \left(x+\frac{12}{x}+8\right)\left(x+\frac{12}{x}-7\right)=16$$

Đặt $x+\frac{12}{x}=t$ ta có $(t+8)(t-7)=16 \Leftrightarrow t^2+t-72=0 \Leftrightarrow (t-8)(t+9)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{12}{x}-8\right)\left(x+\frac{12}{x}+9\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-8x+12\right)\left(x^2+9x+12\right)=0 \Rightarrow x\in\left\{2;6;-9+\sqrt{33};-9-\sqrt{33}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện, suy ra phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{2;6;-9+\sqrt{33};-9-\sqrt{33}\right\}$.

Bài toán 244. Giải phương trình $\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(1+\frac{6}{x}\right)(x-2)(x-12)=25 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 0$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(x+4)(x+6)}{x}.\frac{(x-2)(x-12)}{x}=25\Leftrightarrow\frac{x^2+10x+24}{x}.\frac{x^2-14x+24}{x}=25\Leftrightarrow\left(x+\frac{24}{x}+10\right)\left(x+\frac{24}{x}-14\right)=25.$$

Đặt $x+\frac{24}{x}-2=t$ ta được $(t+12)(t-12)=25\Leftrightarrow t2=169\Leftrightarrow\left(x+\frac{24}{x}-13\right)\left(x+\frac{24}{x}+13\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-13x+24\right)\left(x^2+13x+24\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{13+\sqrt{73}}{2};\frac{13-\sqrt{73}}{2};\frac{-13+\sqrt{73}}{2};\frac{-13-\sqrt{73}}{2}\right\}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm, $S=\left\{\frac{13+\sqrt{73}}{2};\frac{13-\sqrt{73}}{2};\frac{-13+\sqrt{73}}{2};\frac{-13-\sqrt{73}}{2}\right\}$.

Bài toán 245. Giải phương trình $\left(2x^2-7x+3\right)\left(2x^2+25x+75\right)=-224x^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$; phương trình ban đầu tương đương với

$$(2x-1)(x-3)(2x+5)(x+15)=-224x^2\Leftrightarrow\left[(2x-1)(x+15)\right]\left[(x-3)(2x+5)\right]=-224x^2$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+29x-15\right)\left(2x^2-x-15\right)=-224x^2\Leftrightarrow\frac{2x^2+29x-15}{x}.\frac{2x^2-x-15}{x}=-224$$

$$\Leftrightarrow\left(2x+29-\frac{15}{x}\right)\left(2x-1-\frac{15}{x}\right)=-224\Leftrightarrow\left(2x-\frac{15}{x}\right)^2+28\left(2x-\frac{15}{x}\right)+195=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x-\frac{15}{x}+13\right)\left(2x-\frac{15}{x}+15\right)=0\Leftrightarrow\left(2x^2+13x-15\right)\left(2x^2+15x-15\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(2x+15)\left(2x^2+15x-15\right)=0\Leftrightarrow x=1;x=-\frac{15}{2};x=\frac{-25+\sqrt{345}}{4};x=\frac{-25-\sqrt{345}}{4}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{-25-\sqrt{345}}{4};-\frac{15}{2};1;\frac{-25+\sqrt{345}}{4}\right\}$.

Bài toán 246. Giải phương trình $\left(x^2+2x-8\right)\left(x^2+3x-18\right)=70x^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$; phương trình ban đầu tương đương với

$$(x-2)(x+4)(x-3)(x+6)=70x^2\Leftrightarrow\left[(x-2)(x+6)\right]\left[(x+4)(x-3)\right]=70x^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+4x-12}{x}.\frac{x^2+x-12}{x}=70\Leftrightarrow\left(x-\frac{12}{x}+4\right)\left(x-\frac{12}{x}+1\right)=70$$

Đặt $x-\frac{12}{x}=t$ ta có $(t+4)(t+1)=70\Leftrightarrow t^2+5t-66=0\Leftrightarrow(t-6)(t+11)=0$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{12}{x}-6\right)\left(x-\frac{12}{x}+11\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-6x-12\right)\left(x^2+11x-12\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{3+\sqrt{21};3-\sqrt{21};1;-12\right\}.$$

Kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm như trên.

Bài toán 245. Giải phương trình $\left(x^2+x-1\right)\left(x^2+2x-2\right)=30\left(x-1\right)^2 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

- Xét $x=1$ không là nghiệm của phương trình trên.
- Xét $x\neq 1$, đặt $x-1=y$ ta thu được phương trình $\left(y^2+2y+1+y+1-1\right)\left(y^2+2y+1+2y+2-2\right)=30y^2$

$$\Leftrightarrow\left(y^2+3y+1\right)\left(y^2+4y+1\right)=30y^2\Leftrightarrow\frac{y^2+3y+1}{y}.\frac{y^2+4y+1}{y}=30\Leftrightarrow\left(y+\frac{1}{y}+3\right)\left(y+\frac{1}{y}+4\right)=30$$

Đặt $y+\frac{1}{y}+3=t$ ta có

$$t\left(t+1\right)=30\Leftrightarrow\left(t-5\right)\left(t+6\right)=0\Leftrightarrow\left(y+\frac{1}{y}-2\right)\left(y+\frac{1}{y}+9\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(y-1\right)^2\left(y^2+9y+1\right)=0\Leftrightarrow y\in\left\{-9+\sqrt{77};-9-\sqrt{77};1\right\}\Rightarrow x\in\left\{-8+\sqrt{77};-8-\sqrt{77};2\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x\in\left\{-8+\sqrt{77};-8-\sqrt{77};2\right\}$.

Bài toán 246. Giải phương trình $\left(x^2+3x+4\right)\left(x^2+x+2\right)=8\left(x+1\right)^2 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

- Xét $x=-1$ không thỏa mãn phương trình ban đầu.
- Xét $x\neq -1$, đặt $x+1=y$ ta có phương trình tương đương

$$\left(y^2-2y+1+3y-3+4\right)\left(y^2-2y+1+y-1+2\right)=8y^2\Leftrightarrow\left(y^2+y+2\right)\left(y^2-y+2\right)=8y^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{y^2+y+2}{y}.\frac{y^2-y+2}{y}=8\Leftrightarrow\left(y+\frac{2}{y}+1\right)\left(y+\frac{2}{y}-1\right)=8\Leftrightarrow\left(y+\frac{2}{y}\right)^2=9$$

$$\Leftrightarrow\left(y+\frac{2}{y}+3\right)\left(y+\frac{2}{y}-3\right)=0\Leftrightarrow\left(y^2+2y+3\right)\left(y^2+2y-3\right)=0\Leftrightarrow y\in\left\{1;-3\right\}\Rightarrow x\in\left\{0;-4\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0;x=-4$.

Bài toán 247. Giải phương trình $\left(2x^2-2x+1\right)\left(4x^2+2x-1\right)=5\left(2x-1\right)^2 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

- Xét $2x-1=0$ không thỏa mãn phương trình ban đầu.
- Xét $x\neq\frac{1}{2}$, đặt $2x-1=y$ ta có phương trình tương đương

$$\left[\left(y+1\right)^2-2\left(y+1\right)+2\right]\left[\left(y+1\right)^2+y+1-1\right]=10y^2$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2+1\right)\left(y^2+3y+1\right)=10y^2\Leftrightarrow\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{y}+3\right)=10$$

Đặt $y+\frac{1}{y}=t$ ta được $t(t+3)=10 \Leftrightarrow (t-2)(t+5)=0 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{y}-2\right)\left(y+\frac{1}{y}+5\right)=0 \Leftrightarrow (y-1)^2(y^2+5y+1)=0$

$\Leftrightarrow y\in\left\{1;-5+\sqrt{21};-5-\sqrt{21}\right\} \Rightarrow x\in\left\{1;\frac{-4+\sqrt{21}}{2};\frac{-4-\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm.

Bài toán 248. Giải phương trình $x^2+4x-4=24\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $x^2(x^2+4x-4)=24(x-1)^2$.

Dễ thấy $x=1$ không thỏa mãn phương trình trên, đặt $x-1=t,(t\neq 0)$ ta đưa về

$$(t+1)^2(t^2+2t+1+4t+4-4)=24t^2$$

$$\Leftrightarrow (t^2+2t+1)(t^2+6t+1)=24t^2 \Leftrightarrow \left(t+2+\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{6}{t}+1\right)=24$$

Đặt $t+2+\frac{1}{t}=u$ thu được

$$u(u+4)=24 \Leftrightarrow (u-4)(u+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(t+\frac{1}{t}-2\right)\left(t+\frac{1}{t}+8\right)=0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+8t+1)=0$$

$$\Rightarrow t\in\left\{1;-4+\sqrt{15};-4-\sqrt{15}\right\} \Rightarrow x\in\left\{2;-3+\sqrt{15};-3-\sqrt{15}\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 249. Giải phương trình $(x^2+4x+5)(2x^2+9x+12)=10(2+x)^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Nhận xét $x=-2$ không phải là nghiệm của phương trình. Do đó đặt $x+2=t,(t\neq 0)\Rightarrow x=t-2$. Ta thu được

$$(t^2-4t+4+4t-8+5)(2t^2-8t+8+9t-18+12)=10t^2$$

$$\Leftrightarrow (t^2+1)(2t^2+t+2)=10t^2 \Leftrightarrow \left(t+\frac{1}{t}\right)\left(2t+\frac{2}{t}+1\right)=10$$

Đặt $t+\frac{1}{t}=u$ chúng ta thu được

$$u(2u+1)=10 \Leftrightarrow (u-2)(2u+5)=0 \Leftrightarrow \left(t+\frac{1}{t}-2\right)\left(2t+\frac{2}{t}+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2)(2t+1)=0 \Leftrightarrow t\in\left\{-\frac{1}{2};-2;1\right\} \Rightarrow x\in\left\{-\frac{5}{2};-4;-1\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{-\frac{5}{2};-4;-1\right\}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-8x+1\right)=-18x^2$.
2. $\dfrac{99x}{x^2+6x+2}=\dfrac{x^2+8x+2}{x}$.
3. $\left(x^2+x+4\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+4\right)=60x$.
4. $\left(2x^2-3x+1\right)\left(2x^2+5x+1\right)=57x^2$.
5. $\left(x+1\right)^2\left(x^2+5x+1\right)=28x^2$.
6. $\left(x+4\right)\left(x-3\right)\left(x-2\right)\left(x+6\right)=70x^2$.
7. $\left(x+3-\dfrac{4}{x}\right)\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\left(x+8\right)=154$.
8. $\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)\left(x+6\right)=168x^2$.
9. $\left(x+5\right)\left(1+\dfrac{6}{x}\right)\left(x+10\right)\left(x+12\right)=6006x$.
10. $9\left(x^2-6x+5\right)\left(x-4\right)\left(x-20\right)=-68x^2$.
11. $\left(x^2+7x+6\right)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=168$.
12. $\left(x+3\right)\left(x+2\right)\left(\dfrac{4}{x}+1\right)\left(x+6\right)=30x$.
13. $\left(x+9\right)\left(1+\dfrac{12}{x}\right)=\dfrac{3080x}{x^2+14x+48}$.
14. $\left(x+1\right)\left(\dfrac{10}{x^2}+\dfrac{9}{x}+2\right)\left(5+x\right)=252$.
15. $\left(x+5\right)\left(1+\dfrac{6}{x}\right)\left(1+\dfrac{10}{x}\right)=\dfrac{-120}{x+12}$.
16. $\left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+15x+36\right)=144x^2$.
17. $\left(x^2+3x+2\right)\left(x+9+\dfrac{18}{x}\right)=168x$.
18. $\left(x^2+x-20\right)\left(x^2-9x-10\right)=56\left(x-1\right)^2$.
19. $\left(x+5\right)\left(x+30\right)=\dfrac{2604x^2}{x^2+7x+6}$.
20. $\left(x+1\right)\left(x+3\right)\left(1+\dfrac{7}{x}\right)=270\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2$.
21. $\dfrac{\left(x+6\right)\left(x+9\right)}{840x^2}=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$.
22. $\dfrac{30\left(1-x\right)^2}{x^2+x-1}=x^2+2x-2$.
23. $\left(2x^2+1\right)\left(x-1\right)\left(2x-1\right)=18x^2$.

Bài toán 250. Giải phương trình $\left(x^2+2\right)^2-5x\left(x^2+2\right)+6x^2=0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^4-5x^3+10x^2-10x+4=0 \Leftrightarrow x^4-x^3-4x^3+4x^2+6x^2-6x-4x+4=0$$
$$\Leftrightarrow x^3(x-1)-4x^2(x-1)+6x(x-1)-4(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3-4x^2+6x-4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^3-2x^2-2x^2+4x+2x-4\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left[x^2(x-2)-2x(x-2)+2(x-2)\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\left(x^2-2x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)(x-2)=0\\ (x-1)^2=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{1;2\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với $x^4-5x^3+10x^2-10x+4=0$.

- Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x\neq 0$; phương trình đã cho tương đương với $x^2+\dfrac{4}{x^2}-5\left(x+\dfrac{2}{x}\right)+10=0 \quad (1)$.

Đặt $x+\dfrac{2}{x}=t \Rightarrow x^2+\dfrac{4}{x^2}=t^2-4$. Phương trình (1) trở thành

$$t^2-4-5t+10=0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{2}{x}-2\right)\left(x+\frac{2}{x}-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)\left[(x-1)^2+1\right]=0 \Leftrightarrow x\in\{1;2\}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1;2\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x^2+2=t\ (t>0)$ thu được

$$t^2-5xt+6x^2=0 \Leftrightarrow (t-2x)(t-3x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x+2\right)\left(x^2-3x+2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\left(x^2-2x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1;x=2\\ (x-1)^2=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1;x=2$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1;2\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Nhận xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Xét trường hợp $x\neq 0$, phương trình trở thành $\left(\dfrac{x^2+2}{x}\right)^2-5.\dfrac{x^2+2}{x}+6=0$. Đặt $\dfrac{x^2+2}{x}=t$ ta được

$$t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow (t-2)(t-3)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2+2}{x}-2\right)\left(\frac{x^2+2}{x}-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+2\right)\left(x^2-3x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[(x-2)^2+1\right](x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x\in\{1;2\}$$

Vậy kết luận tập hợp nghiệm là $S=\{1;2\}$.

Lời giải 5.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $1-5.\dfrac{x}{x^2+2}+6\left(\dfrac{x}{x^2+2}\right)^2=0$.

Đặt $\frac{x}{x^2+2}=t$ ta được $6t^2-5t+1=0 \Leftrightarrow (2t-1)(3t-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2t=1\\3t=1\end{array}\right.$

- $2t=1 \Leftrightarrow x^2-2x+2=0, \Delta<0$, trường hợp này vô nghiệm.
- $3t=1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x\in\{1;2\}$.

Kết luận phương trình có hai nghiệm $x=1; x=2$.

Nhận xét.

Bài toán 250 là một phương trình bậc cao cơ bản, sau khi khai triển thu được phương trình đa thức bậc bốn. Phương trình bậc bốn có khá nhiều cách giải, đặc biệt khi hình thức bài toán có sự đặc biệt. Có thể nhận thấy năm lời giải trên cũng hoàn toàn thuần túy và quen thuộc với nhiều bạn học sinh, các bạn chú ý các lời giải 3, 4, 5 đều có cùng bản chất, cũng là trọng tâm của chuyên mục này. Tác giả xin nhận xét cụ thể về từng lời giải

- *Lời giải 1 thực hiện khai triển bình phương đưa về phương trình bậc bốn, dựa trên hai nghiệm đặc biệt của phương trình là $x=1; x=2$. Do tổng các hệ số đa thức bằng 0 nên phương trình sẽ xuất hiện nghiệm $x=1$, tiếp tục sử dụng lược đồ Horne hoặc chia đa thức thu được đa thức thương bậc ba, phương trình tích hệ quả này lại có thêm nghiệm $x=2$, và phương trình bậc hai cuối cùng vô nghiệm rất dễ lập luận. Để lời giải được tự nhiên các bạn có thể nhóm nhân tử như phía trên hoặc nhân trả lại dưới dạng*
$$x^2(x^2-2x+2)-3x(x^2-2x+2)+2(x^2-2x+2)=0 \Leftrightarrow (x^2-3x+2)(x^2-2x+2)=0 \qquad (i)$$
Lưu ý có thể sử dụng hệ số bất định để phân tích được hệ quả (i) mà không thông qua các nghiệm đa thức.
- *Lời giải 2 vẫn sử dụng khai triển bình phương, thu được phương trình bậc bốn, tuy nhiên nó lại có dạng đặc biệt, không khó nhận thấy đây là dạng "Phương trình hệ số đối xứng tỉ lệ", cách giải đơn giản là đặt ẩn phụ sau khi xét và chia hai vế tương ứng cho x^2. Về các dạng phương trình – bất phương trình hệ số đối xứng sẽ được trình bày tại Lý thuyết phương trình bậc cao (Phần 2).*
- *Các lời giải 3, 4, 5 nhằm mục đích tìm tỉ lệ giữa hai biểu thức $f(x)=x^2+2$ và $g(x)=x$. Lí do vì sao lại đi theo hướng đi này ? Để dễ hình dung các bạn có thể quan sát lời giải 3, phép đặt ẩn phụ $t=x^2+2$ đưa phương trình về dạng đồng bậc hai $t^2-5xt+6x^2=0$.*
Đối với phương trình bậc hai cơ bản $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$, người ta có thể thay thế x bởi một biến phụ, trong lớp bài toán này chính là $t=\frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x)=x^2+2$; $g(x)=x$ và hoán vị ngược lại. Khi đó dạng đồng bậc hai sẽ xuất hiện khi quy đồng mẫu thức:
$$a[f(x)]^2+bf(x).g(x)+c[g(x)]^2=0 \text{ hoặc } a[g(x)]^2+bf(x).g(x)+c[f(x)]^2=0.$$
Với các dạng đồng bậc (đẳng cấp) tương tự thế này, chúng ta luôn tìm được tỉ lệ $t=\frac{f(x)}{g(x)}$ tức là nghiệm của phương trình bậc hai theo công thức nghiệm. Độ khó của bài toán tỉ lệ thuận với sự phức tạp của các biểu thức $f(x), g(x)$, tại phần sau của tài liệu, các bạn sẽ làm việc với dạng đồng bậc ba.
Lời giải 4 và 5 thực hiện chia hai vế cho $f^2(x)$ hoặc $g^2(x)$ để làm xuất hiện tỉ lệ $t=\frac{f(x)}{g(x)}$, giải phương trình bậc hai ẩn t cho kết quả rất ngắn gọn, lưu ý lời giải 5 "ưu việt" hơn lời giải 4 một chút, vì x^2+2 luôn luôn dương với mọi x, còn lời giải 4 chúng ta cần xét $x=0$ trước khi chia và đặt ẩn phụ, đây cũng là một điểm đáng lưu ý đối với các bạn học sinh, đặc biệt với lớp bài toán bất phương trình.
Quá trình chia tạo lập ẩn phụ được coi như bản chất của các bài toán dạng này, các lời giải 4 và 5 có thể coi như "thủ công, thẳng cẳng", không được "thâm thúy, mỹ miều" như lời giải 3, nó được gọi với cái tên đặt ẩn phụ không hoàn toàn, vẫn dùng công thức nghiệm phương trình bậc hai, trong trường hợp cụ thể bài toán 240 này may mắn trở về dạng đồng bậc. Về vấn đề này mời quý độc giả theo dõi các ví dụ tiếp theo.

Bài toán 251. Giải phương trình $2\left(x^2+2\right)^2-5\left(x^2+2\right)x=-2x^2 \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\left(x^4+4x^2+4\right)-5x^3-10x+2x^2=0\Leftrightarrow 2x^4-5x^3+10x^2-10x+8=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(2x^2-x+4\right)-2x\left(2x^2-x+4\right)+2\left(2x^2-x+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2x+2\right)\left(2x^2-x+4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-2x+2=0 & [1]\\ 2x^2-x+4=0 & [2]\end{array}\right.$$

Hai phương trình [1] và [2] đều vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\left(x^2+2\right)^2-5\left(x^2+2\right)x+2x^2=0\Leftrightarrow 2-5.\dfrac{x}{x^2+2}+2\left(\dfrac{x}{x^2+2}\right)^2=0$.

Đặt $\dfrac{x}{x^2+2}=t$ ta được $2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow(t-2)(2t-1)=0\Leftrightarrow\left(x^2-2x+2\right)\left(2x^2-x+4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-1)^2=-1\\ (x-1)^2+3x^2=-7\end{array}\right.$

Dễ thấy tuyển phương trình trên vô nghiệm. Do đó phương trình ban đầu vô nghiệm.

Lời giải 3.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\left(x^2+2\right)^2-5\left(x^2+2\right)x+2x^2=0$.

Đặt $x^2+2=t$ ta được $2t^2-5tx+2x^2=0\Leftrightarrow(t-2x)(2t-x)=0\Leftrightarrow\left(x^2-2x+2\right)\left(2x^2-x+4\right)=0$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

Qua các lời giải dễ thấy phương trình trong bài toán 251 này vô nghiệm, chính vì lý do này lời giải khai triển phân tích nhân tử theo cách nhẩm nghiệm không xảy ra. Thực tế thì việc nhìn ra nhân tử dương của các đa thức rất khó, nếu không muốn nói là mò mẫm, trong trường hợp này các bạn chỉ có thể sử dụng hệ số bất định – nội dung lời giải 1 (xin trình bày tại Lý thuyết phương trình đại số bậc cao, phân thức hữu tỷ Phần 2).

Lời giải 2 đặt ẩn phụ và tìm tỉ lệ, xin không nhắc lại. Lời giải 3 sử dụng ẩn phụ không hoàn toàn, cụ thể lại quy về đồng bậc. Sau khi đặt $x^2+2=t$ ta thu được phương trình $t^2-5xt+6x^2=0 \quad (*)$.

- *Phương án 1. Giả sử (*) là phương trình bậc hai ẩn t, tham số x.*

  Ta có $\Delta=25x^2-4.6x^2=x^2\Rightarrow\sqrt{\Delta}=|x|$, suy ra các nghiệm $t_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};t_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

  Do $x\in\mathbb{R}$, không rõ dấu nên các khả năng nghiệm là

  $$t_1=\frac{5x+x}{2}=3x;\quad t_2=\frac{5x-x}{2}=2x\quad(x\ge 0)\text{ hoặc }t_1=\frac{5x-x}{2}=2x;\quad t_2=\frac{5x-x}{2}=3x\quad(x<0).$$

  Mặc dù là hai trường hợp $x\ge 0;x<0$ nhưng hoán đổi ta luôn được hai nghiệm của (*) là $t=2x;t=3x$.

  Điều này rất dễ nhận ra nhưng trong lời giải lập luận cần trở nên rõ ràng.

  Một số bạn thường viết $\Delta=x^2$ suy ra hai nghiệm $t=2x;t=3x$, thành thử để tự nhiên hơn chúng ta nên viết

  $$t^2-5xt+6x^2=0\Leftrightarrow t^2-2xt-3xt+6x^2=0\Leftrightarrow(t-2x)(t-3x)=0.$$

  Đây hoàn toàn là kiến thức Đại số 8 THCS, mặc dù "tâm can" của nó là sử dụng công thức nghiệm bậc hai trên kia, đôi khi cũng cần khoác cho lời giải một chiếc áo giản dị để nó trở nên tự tin và bí ẩn hơn !

- *Phương án 2. Giả sử (*) là phương trình bậc hai ẩn x, tham số t.*

  Tương tự phương án 1, chúng ta luôn có hai nghiệm $x=\frac{t}{2};x=\frac{t}{3}$*, do đó đưa về dạng*

$$t^2-5xt+6x^2=0\Leftrightarrow t^2-2xt-3xt+6x^2=0\Leftrightarrow (t-2x)(t-3x)=0.$$

  Trên đây chỉ là những chia sẻ nhỏ về cách sử dụng ẩn phụ không hoàn toàn, mục đích bổ sung cho dạng đồng bậc.

Bài toán 252. Giải phương trình $\left(x^2-x+1\right)^2+2\left(x+1\right)^2=3\left(x^3+1\right)$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $x^2-x+1=a;x+1=b\Rightarrow ab=x^3+1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$a^2+2b^2=3ab\Leftrightarrow (a-2b)(a-b)=0\Leftrightarrow \left(x^2-3x-1\right)\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2};\frac{3-\sqrt{13}}{2};0;2\right\}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Bài toán 253. Giải phương trình $(x+3)^4=\left(x^2+x-6\right)^2+2(x-2)^4$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $(x+3)^2=a;(x-2)^2=b\ \ (a\ge 0;b\ge 0)\Rightarrow ab=\left(x^2+x-6\right)^2$.

Phương trình đã cho tương đương với $a^2-ab-2b^2=0\Leftrightarrow (a+b)(a-2b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+b=0\\ a=2b\end{array}\right.$

- Với $a+b=0\Rightarrow a=b=0\Leftrightarrow \begin{cases}x+3=0\\ x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ x=2\end{cases}$ (Vô nghiệm).
- Với $a=2b\Leftrightarrow x^2+6x+9=2x^2-8x+8\Leftrightarrow x^2-14x-1=0\Leftrightarrow x=7-5\sqrt{2};x=7+5\sqrt{2}$.

Vậy phương trình ban đầu có tập nghiệm $S=\left\{7-5\sqrt{2};7+5\sqrt{2}\right\}$.

Bài toán 254. Giải phương trình $2\left(x^2+x+1\right)^2=7(x-1)^2+13\left(x^3-1\right)$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $x^2+x+1=a;x-1=b$ ta thu được phương trình

$$2a^2-13ab-7b^2=0\Leftrightarrow 2a^2+ab-14ab-7b^2=0\Leftrightarrow (2a+b)(a-7b)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2+3x+1\right)\left(x^2-6x+8\right)=0\Leftrightarrow (x+1)(2x+1)(x-2)(x-4)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-1;-\frac{1}{2};2;4\right\}$$

Phương trình đã cho có tập hợp nghiệm là $S=\left\{-1;-\frac{1}{2};2;4\right\}$.

Bài toán 255. Giải phương trình $2\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2+2\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2=5.\frac{x^2-4}{x^2-9}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\notin\{-3;3\}$.

Đặt $\frac{x+2}{x+3}=a;\frac{x-2}{x-3}=b$ thì phương trình đã cho trở thành

$$2a^2+2b^2=5ab\Leftrightarrow 2a^2-4ab-ab+2b^2=0\Leftrightarrow 2a(a-2b)-b(a-2b)=0\Leftrightarrow (a-2b)(2a-b)=0.$$

- $a=2b\Leftrightarrow \frac{x+2}{x+3}=2.\frac{x-2}{x-3}\Leftrightarrow 2(x^2+x-6)=x^2-x-6\Leftrightarrow x^2+3x-6=0\Leftrightarrow x=\frac{-3-\sqrt{33}}{2};x=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}$.
- $2a=b\Leftrightarrow 2.\frac{x+2}{x+3}=\frac{x-2}{x-3}\Leftrightarrow 2(x^2-x-6)=x^2+x-6\Leftrightarrow x^2-3x-6=0\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{33}}{2};x=\frac{3-\sqrt{33}}{2}$.

Kết hợp điều kiện, phương trình đã cho có bốn nghiệm như trên.

Bài toán 256. Giải phương trình $3\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^2-8.\frac{x^2-1}{x^2-9}+5\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\notin\{-3;3\}$.

Đặt $\frac{x+1}{x-3}=a;\frac{x-1}{x+3}=b$ thì phương trình đã cho trở thành

$$3a^2-8ab+5b^2=0\Leftrightarrow (a-b)(3a-5b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\3a=5b\end{array}\right.$$

- ✓ $a=b\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-3}=\frac{x-1}{x+3}\Leftrightarrow x^2+4x+3=x^2-4x+3\Leftrightarrow x=0$.
- ✓ $3a=5b\Leftrightarrow 3.\frac{x+1}{x-3}=5.\frac{x-1}{x+3}\Leftrightarrow 3(x^2+4x+3)=5(x^2-4x+3)\Leftrightarrow x^2-16x+3=0\Leftrightarrow x\in\{8+\sqrt{61};8-\sqrt{61}\}$.

Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có ba nghiệm.

Bài toán 257. Giải phương trình $\frac{4x^2}{(x-1)^2}-\frac{5x(x-2)}{x^2-1}+\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\notin\{-1;1\}$. Đặt $\frac{x}{x-1}=u;\frac{x-2}{x+1}=v\Rightarrow uv=\frac{x(x-2)}{x^2-1}$.

Phương trình đã cho trở thành $4u^2-5uv+v^2=0\Leftrightarrow (u-v)(4u-v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\v=4u\end{array}\right.$

- $u=v\Leftrightarrow \frac{x}{x-1}=\frac{x-2}{x+1}\Leftrightarrow x^2+x=x^2-3x+2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.
- $4u=v\Leftrightarrow \frac{4x}{x-1}=\frac{x-2}{x+1}\Leftrightarrow 4x^2+4x=x^2-3x+2\Leftrightarrow 3x^2+7x-2=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-7+\sqrt{73}}{2};\frac{-7-\sqrt{73}}{2}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm như trên.

Bài toán 258. Giải phương trình $(x-4)^4+4(x^2+x-20)^2=5(x+5)^4 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $(x-4)^2=u;(x+5)^2=v \quad (u\ge 0;v\ge 0)$ ta thu được $u^2+4uv=5v^2\Leftrightarrow (u-v)(u+5v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u+5v=0\\u=v\end{array}\right.$

Xét hai trường hợp

- Do $u \ge 0; v \ge 0$ nên $u + 5v = 0 \Leftrightarrow u = v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -5 \end{cases}$ (Loại).
- $u = v \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = x^2 + 10x + 25 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 259. Giải phương trình $\dfrac{x^2 + 3x\left(x^2 + x - 3\right) + \left(x^2 + x - 3\right)^2}{5x^2 + 4x\left(x^2 + x - 3\right) + \left(x^2 + x - 3\right)^2} = \dfrac{1}{2}$ $\left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $5x^2 + 4x\left(x^2 + x - 3\right) + \left(x^2 + x - 3\right)^2 \ne 0$. Đặt $x^2 + x - 3 = y$ ta thu được

$$\frac{x^2 + 3xy + y^2}{5x^2 + 4xy + y^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 6xy + 2y^2 = 5x^2 + 4xy + y^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(3x + y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ 3x + y = 0 \end{array}\right.$$

- $x = y \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = x \Leftrightarrow x \in \left\{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\right\}$.
- $3x + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{7}; x = -2 - \sqrt{7}$.

Thử lại nghiệm, kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Bài toán 260. Giải phương trình $\dfrac{(x - 19)^2 - 4(x - 19)(x + 5) + 6(x + 5)^2}{(x - 19)^2 + 5(19 - x)(x + 5) - 4(x + 5)^2} = \dfrac{3}{2}$ $\left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $(x - 19)^2 + 5(19 - x)(x + 5) - 4(x + 5)^2 \ne 0$. Đặt $x - 19 = u; x + 5 = v$ ta có

$$\frac{u^2 - 4uv + 6v^2}{u^2 + 5uv - 4v^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2u^2 - 8uv + 12v^2 = 3u^2 + 15uv - 12v^2 \Leftrightarrow u^2 + 23uv - 24v^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + 24v = 0 \end{array}\right.$$

- $u = v \Leftrightarrow x - 19 = x + 5 \Leftrightarrow 0x = 24$ (Vô nghiệm).
- $u + 24v = 0 \Leftrightarrow x - 19 + 24(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{139}{25}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{139}{25}$.

Bài toán 261. Giải phương trình $\left(x^2 + x + 1\right)^2 + 4(x - 1)^2 + 5 = 5x^3$ $\left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với $1 + 4\left(\dfrac{x - 1}{x^2 + x + 1}\right)^2 = 5.\dfrac{x - 1}{x^2 + x + 1}$.

Đặt $\dfrac{x - 1}{x^2 + x + 1} = t$ ta được $4t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(4t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ 4t = 1 \end{array}\right.$

- $t = 1 \Leftrightarrow x - 1 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 = -2$ (Vô nghiệm).
- $4t = 1 \Leftrightarrow 4x - 4 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = 0$ (Vô nghiệm do $\Delta < 0$).

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 262. Giải phương trình $\left(x^2 - 3x + 1\right)^2 + (x - 1)\left(4x^2 + 15x + 1\right) = 0$ $\left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2-3x+1\right)^2+\left(x-1\right)\left[4\left(x^2-3x+1\right)+3\left(x-1\right)\right]=0 \Leftrightarrow \left(x^2-3x+1\right)^2+4\left(x^2-3x+1\right)\left(x-1\right)+3\left(x-1\right)^2=0 \quad (1).$$

Đặt $x^2-3x+1=a; x-1=b$ thì phương trình (1) trở thành

$$a^2+4ab+3b^2=0 \Leftrightarrow a^2+ab+3ab+3b^2=0 \Leftrightarrow a\left(a+b\right)+3b\left(a+b\right)=0 \Leftrightarrow \left(a+b\right)\left(a+3b\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x\right)\left(x^2-2\right)=0 \Leftrightarrow x\left(x-2\right)\left(x^2-2\right)=0 \Leftrightarrow x=0; x=2; x=\sqrt{2}; x=-\sqrt{2}$$

Phương trình đã cho có tập hợp nghiệm $S=\left\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2};2\right\}$.

Bài toán 263. Giải phương trình $x^4+7x^2\left(x^2+2x+1\right)=8\left(1+x\right)^4 \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Nhận xét $x=-1$ không thỏa mãn phương trình trên.

Xét $x \neq -1$, phương trình đã cho tương đương với $x^4+7x^2\left(x+1\right)^2=8\left(1+x\right)^4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^4+7\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=8$.

Đặt $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=t \quad \left(t \geq 0\right)$ ta có

$$\begin{cases} t^2+7t-8=0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(t-1\right)\left(t+8\right)=0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x}{x+1}\right|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x+1 \\ x=-x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}.$$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Bài toán 264. Giải phương trình $\dfrac{\left(x^2-2\right)^2}{x-1}=5x^2-6x-4 \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x \neq 1$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2-2\right)^2=\left(x-1\right)\left(5x^2-6x-4\right) \Leftrightarrow \left(x^2-2\right)^2=\left(x-1\right)\left[5\left(x^2-2\right)-6\left(x-1\right)\right].$$

Đặt $x^2-2=u; x-1=v$ ta có $u^2=v\left(5u-6v\right) \Leftrightarrow u^2-5uv+6v^2=0 \Leftrightarrow \left(u-2v\right)\left(u-3v\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2v \\ u=3v \end{array}\right.$

- $u=2v \Leftrightarrow x^2-2=2x-2 \Leftrightarrow x\left(x-2\right)=0 \Leftrightarrow x=0; x=2$.
- $u=3v \Leftrightarrow x^2-2=3x-3 \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Bài toán 265. Giải phương trình $\dfrac{2\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)}{3x^2+2x-4}=\dfrac{x-2}{x+2} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $3x^2+2x-4 \neq 0; x \neq -2$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x-1)^2(x+2)(x+2)=(x-2)(3x^2+2x-4)\Leftrightarrow 2(x^2+x-2)^2=(x-2)\left[3(x^2+x-2)-(x-2)\right].$$

Đặt $x^2+x-2=a;x-2=b$ ta thu được

$$2a^2=b(3a-b)\Leftrightarrow 2a^2-3ab+b^2=0\Leftrightarrow (a-b)(2a-b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\2a=b\end{array}\right.$$

- $a=b\Leftrightarrow x^2+x-2=x-2\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.
- $2a=b\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=x-2\Leftrightarrow 2x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4};x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$.

So sánh điều kiện, kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm, $x=0;x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4};x=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$.

Bài toán 266. Giải phương trình $(x^2+x+1)^2-5(x^4+x^2+1)+4(x^2-x+1)^2=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $x^2+x+1=a;x^2-x+1=b\Rightarrow ab=x^4+x^2+1$. Phương trình đã cho trở thành

$$a^2-5ab+4b^2=0\Leftrightarrow (a-b)(a-4b)=0\Leftrightarrow 2x(-3x^2+5x-3)=0\Leftrightarrow x\in\{0\}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 267. Giải phương trình $(x-2)^4+4(x^2+2x-1)^4=5(x^3-5x+2)^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $(x-2)^2=u;(x^2+2x-1)^2=v\Rightarrow uv=(x^3-5x+2)^2$.

Phương trình đã cho tương đương với $u^2-5uv+4v^2=0\Leftrightarrow (u-v)(u-4v)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\u=4v\end{array}\right.$

- $u=v\Leftrightarrow (x-2)^2=(x^2+2x-1)^2\Leftrightarrow (x^2+x+1)(x^2+3x-3)=0\Leftrightarrow x\in\{-3+\sqrt{21};-3-\sqrt{21}\}$.
- $u=v\Leftrightarrow (x-2)^2=4(x^2+2x-1)^2\Leftrightarrow x(2x+3)(2x^2+5x-4)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\dfrac{3}{2};0;\dfrac{-5+\sqrt{57}}{4};-\dfrac{5+\sqrt{57}}{4}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm như trên.

Bài toán 268. Giải bất phương trình $(3x^2-1)(3x^2-7x+13)+10(2-x)^2\le 0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $(3x^2-1)\left[3x^2-1-7(x-2)\right]+10(x-2)^2\le 0$

Đặt $3x^2-1=u;x-2=v$ ta được

$$u(u-7v)+10v^2\le 0\Leftrightarrow (u-2v)(u-5v)\le 0\Leftrightarrow (3x^2-2x+3)(3x^2-5x+9)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (3x^2-2x+3)(36x^2-60x+108)\le 0\Leftrightarrow \left[x^2+(x-1)^2+2\right]\left[(6x-5)^2+83\right]\le 0 \qquad [*]$$

Dễ thấy [*] vô nghiệm nên bất phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 269. Giải phương trình $(x^3+3)(x^3-20x-1)+3(5x+1)^2=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Phương trình đã cho tương đương với $\left(x^3+3\right)\left[\left(x^3+3\right)-4\left(5x+1\right)\right]+3\left(5x+1\right)^2=0$.
Đặt $x^3+3=a;5x+1=b$ ta thu được

$$a\left(a-4b\right)+3b^2=0 \Leftrightarrow a^2-4ab+3b^2=0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a-3b\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^3-5x+2\right)\left(x^3-15x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2+2x-1\right)x\left(x^2-15\right)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{15};0;2;\sqrt{15};-1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right\}$$

Vậy phương trình ban đầu có sáu nghiệm như trên.

Bài toán 270. Giải phương trình $\left(3+x^3\right)\left(2x^3-5x^2-5x-4\right)+3\left(x^2+x+2\right)^2=0 \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.
Phương trình đã cho tương đương với $\left(3+x^3\right)\left[2\left(3+x^3\right)-5\left(x^2+x+2\right)\right]+3\left(x^2+x+2\right)^2=0$.
Đặt $3+x^3=a;x^2+x+2=b$ thu được

$$a\left(2a-5b\right)+3b^2=0 \Leftrightarrow 2a^2-5ab+3b^2=0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(2a-3b\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ 2a=3b \end{array}\right.$$

- $a=b \Leftrightarrow x^3-x^2-x+1=0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2\left(x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=-1;x=1$.
- $2a=3b \Leftrightarrow 2x^3+6=3x^2+3x+6 \Leftrightarrow x\left(2x^2-3x-3\right)=0 \Leftrightarrow x=0;x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4};x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}$.

Vậy phương trình ban đầu có năm nghiệm $x=-1;x=1;x=0;x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4};x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}$.

Bài toán 271. Giải phương trình $\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^2-7\left(\dfrac{x^2-9}{x^2-25}\right)+\dfrac{24\left(x-4\right)}{\left(x-5\right)^2}+6=0 \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x \notin \left\{-5;5\right\}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{x+3}{x+5}\right)^2-7\left(\frac{x^2-9}{x^2-25}\right)+\frac{24\left(x-4\right)+6\left(x^2-10x+25\right)}{\left(x-5\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+3}{x+5}\right)^2-7.\frac{x+3}{x+5}.\frac{x-3}{x-5}+6.\frac{\left(x-3\right)^2}{\left(x-5\right)^2}=0.$$

Đặt $\dfrac{x+3}{x+5}=a;\dfrac{x-3}{x-5}=b$ thu được $a^2-7ab+6b^2=0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(a-6b\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=6b \end{array}\right.$

- $a=b \Leftrightarrow 4x=0 \Leftrightarrow x=0$.
- $a=6b \Leftrightarrow 5x^2+14x-75=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-7+2\sqrt{106}}{5};x=\dfrac{-7-2\sqrt{106}}{5}$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình có tập nghiệm $S=\left\{0;\dfrac{-7+2\sqrt{106}}{5};\dfrac{-7-2\sqrt{106}}{5}\right\}$.

Bài toán 272. Giải phương trình $\dfrac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}+4x^2-16x+17=\dfrac{5x\left(x-2\right)}{x-1} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$.

Lời giải.
Điều kiện $x \neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2}+1+\left(4x^2-16x+16\right)=\frac{5x(x-2)}{x-1}\Leftrightarrow\frac{x^2}{(x-1)^2}-\frac{5x(x-2)}{x-1}+4(x-2)^2=0.$$

Đặt $\frac{x}{x-1}=u;x-2=v$ thu được $u^2-5uv+4v^2=0\Leftrightarrow(u-v)(u-4v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u=4v\end{array}\right.$

- $u=v\Leftrightarrow x=x^2-3x+2\Leftrightarrow x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2};x=2-\sqrt{2}$.
- $u=4v\Leftrightarrow x=4\left(x^2-3x+2\right)\Leftrightarrow 4x^2-13x+8=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{13+\sqrt{41}}{8};\frac{13-\sqrt{41}}{8}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm, $S=\left\{2+\sqrt{2};2-\sqrt{2};\frac{13+\sqrt{41}}{8};\frac{13-\sqrt{41}}{8}\right\}$.

Bài toán 273. Giải phương trình $-\frac{4(x+1)}{(x+2)^2}-\frac{6x(x+1)}{x+2}+5x^2+10x+6=0\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq-2$.
Phương trình đã cho tương đương với

$$-\frac{4(x+1)}{(x+2)^2}+1-\frac{6x(x+1)}{x+2}+5x^2+10x+5=0\Leftrightarrow\left(\frac{x}{x+2}\right)^2-6\frac{x(x+1)}{x+2}+5(x+1)^2=0.$$

Đặt $\frac{x}{x+2}=u;x+1=v$ ta có $u^2-6uv+5v^2=0\Leftrightarrow(u-v)(u-5v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u=5v\end{array}\right.$

- $u=v\Leftrightarrow x=x^2+3x+2\Leftrightarrow(x+1)^2=-1$ (Vô nghiệm).
- $u=5v\Leftrightarrow x=5x^2+15x+10\Leftrightarrow 5x^2+14x+10=0,\Delta<0$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 274. Giải phương trình $\frac{2x+5}{(x+2)^2}-\frac{3\left(x^2+4x+3\right)}{x+2}+2x(x+2)+3=0\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq-2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x+5}{(x+2)^2}+1-\frac{3(x+1)(x+3)}{x+2}+2x(x+2)+3-1=0\Leftrightarrow\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2-3\frac{x+3}{x+2}.(x+1)+2(x+1)^2=0.$$

Đặt $\frac{x+3}{x+2}=a;x+1=b$ ta được $a^2-3ab+2b^2=0\Leftrightarrow(a-b)(a-2b)=0$.

- $a=b\Leftrightarrow x+3=x^2+3x+2\Leftrightarrow x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{2};x=-1-\sqrt{2}$.
- $a=2b\Leftrightarrow x+3=2\left(x^2+3x+2\right)\Leftrightarrow 2x^2+5x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{-5+\sqrt{17}}{2};x=-\frac{5+\sqrt{17}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận tập nghiệm $S=\left\{\frac{-5+\sqrt{17}}{2};-\frac{5+\sqrt{17}}{2};-1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right\}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\left(x^2+2\right)^2-3x\left(x^2+2\right)+2x^2=0$.
2. $\left(1+x^2\right)^2+3x^2=4\left(1+x^2\right)x$.
3. $x^4+3x^2+1=4x\left(x^2+1\right)$.
4. $2\left(x^2+x+1\right)^2\le 7\left(x-1\right)^2+13\left(x^3-1\right)$.
5. $3\left(x^2-x+1\right)^2>2\left(x+1\right)^2+5\left(x^3+1\right)$.
6. $\left(x+3\right)^4=\left(x^2+x-6\right)^2+2\left(x-2\right)^4$.
7. $\left(x^2+x+1\right)^2\le x\left(3x^2+5x+3\right)$.
8. $\left(x^2+x+1\right)^2=3\left(x^4+x^2+1\right)$.
9. $x^2-10x\left(x^2+2x+5\right)+9\left(x^2+2x+5\right)^2>0$.
10. $x^4+3x^2+1=6x\left(x^2+1\right)$.
11. $\dfrac{\left(x^2+x+2\right)^2}{6x^2+x+7}=1+x$
12. $x^4+12x^2+9=7\left(x^2+3\right)x$.
13. $x^2+2x^4+4=4x+3x^2\left(x-2\right)$.
14. $2\left(x-3\right)^4-5\left(2x^2-7x+3\right)^2+2\left(2x-1\right)^4\le 0$.
15. $\dfrac{\left(x^2-6x+5\right)^2}{7x^2+12x-22}<4\left(4-3x^2\right)$.
16. $18\left(2x-1\right)^2=x\left(9-4x\right)\left(4x^2-27x+9\right)$.
17. $4\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)^2+3\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)^2=7\left(x^4+1\right)$.
18. $\left(x^2+4x+9\right)^2+3\left(x^2-4x+7\right)^2\ge 4\left(x^4-8x+63\right)$.
19. $\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}+\dfrac{6x^2}{\left(x-1\right)^2}=\dfrac{7x}{\left(x-2\right)\left(x-1\right)}$.
20. $\left(x-3\right)^4+15\left(2x^2+6x-1\right)^4=8\left(2x^3-19x+3\right)^2$.
21. $2\left(x^2-2x+2\right)^2-5\left(x^4+4\right)+2\left(x^2+2x+2\right)^2<0$.
22. $3x^2-10x\left(x^2-x+1\right)=-7\left(1+x-x^2\right)^2$.
23. $2\left(x^2-2\right)+\dfrac{x+20}{x+5}+\dfrac{1}{\left(x+5\right)^2}=0$.
24. $\left(x^2-x+1\right)^2+6\left(x+1\right)^2\le 7\left(x^3+1\right)$.
25. $\dfrac{x^2}{\left(x-1\right)^2}+\left(\dfrac{2x-2}{x-2}\right)^2=\dfrac{5x}{x-2}$.

26. $\left(1+x^2\right)\left(3x^2-7x-18\right)+4\left(x+3\right)^2=0$.

27. $20\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2=\frac{5}{2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right)$.

28. $\frac{4x^2}{\left(x-1\right)^2}-\frac{7x}{x^2-3x+2}+\frac{1}{\left(x-2\right)^2}=0$.

29. $4\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-7.\frac{x-1}{x+2}+3\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2>0$.

30. $\frac{4x^2}{\left(x-1\right)^2}-\frac{5x\left(x-2\right)}{x^2-1}+\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2=0$.

31. $\frac{\left(3-x\right)^2-2x\left(3-x\right)+x^2}{4\left(3-x\right)^2-9\left(3-x\right)+5x^2}=\frac{1}{3}$..

32. $4x^2-\frac{5x\left(x+1\right)}{x+2}+\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\le 0$.

33. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\frac{6x}{x+2}=7\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$.

34. $x^2-1+\frac{6\left(x+3\right)^2}{\left(x+1\right)^2}>\frac{7x^2+20x-17}{1+x}$.

35. $x^2-\frac{3x\left(2x-1\right)}{x+3}+2\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^2=0$.

36. $\frac{x^2}{x^2-2x+1}-\frac{7x\left(x-2\right)}{x-1}+6\left(x^2+4\right)=24x$.

37. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2+48\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right)>5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$.

38. $\frac{\left(x^2+3\right)^2-5x\left(x^2+3\right)+6\left(x^2+3\right)^2}{\left(x^2+3\right)^2+4x\left(x^2+3\right)}=\frac{2}{5}$.

39. $\frac{x^4+4x^2\left(x^2+4x+1\right)+\left(x^2+4x+1\right)^2}{x^4+3\left(x^2+4x+1\right)^2}=\frac{3}{2}$.

40. $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2-\frac{4\left(x^2-1\right)}{x^2+5x+6}+3\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2\le 0$.

41. $\frac{\left(x+1\right)^4+3\left(x+1\right)^2\left(x^2-3x\right)+x^2\left(x-3\right)^2}{\left(x+1\right)^4+3x^2\left(x-3\right)^2}=\frac{5}{4}$.

42. $x^4+6x^3+14x^2+6x+1=4x\left(x^2+3x+1\right)^2$

43. $\frac{\left(x-2011\right)^2-4\left(x-2011\right)\left(x-2012\right)+2013\left(x-2012\right)^2}{\left(x-2012\right)^2+5\left(x-2011\right)\left(x-2012\right)+2011\left(2012-x\right)^2}=\frac{2013}{2011}$.

Bài toán 275. Giải bất phương trình $x^3+\dfrac{2x^2(x-1)}{x+1}-3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -1$. Đặt $\dfrac{x-1}{x+1}=y$, phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+2x^2y-3y^3=0\Leftrightarrow x^3-x^2y+3x^2y-3y^3=0\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+3xy+3y^2\right)=0.$$

- $x-y=0\Leftrightarrow x^2+x=x-1$ (vô nghiệm).
- $x^2+3xy+3y^2=0\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{3}{2}y\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$ (Loại).

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 276. Giải phương trình $2x^3+\dfrac{3x^2(x+2)}{x+1}-5\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^3=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -1$.

Đặt $\dfrac{x+2}{x+1}=y$ ta thu được phương trình $2x^3+3x^2y-5y^3=0\Leftrightarrow (x-y)\left(2x^2+5xy+5y^2\right)=0$.

- $x=y\Leftrightarrow x^2+x=x+2\Leftrightarrow x=\sqrt{2};x=-\sqrt{2}$.
- $2x^2+5xy+5y^2=0\Leftrightarrow 2\left(x+\dfrac{5}{4}y\right)^2+\dfrac{15}{8}y^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\x=-2\end{cases}$ (Loại).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 277. Giải bất phương trình $3x^3+\dfrac{4x^3}{x+1}\le 7\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -1$.

Đặt $\dfrac{x}{x+1}=y$, bất phương trình đã cho trở thành

$$3x^3+4x^2y-7y^3\le 0\Leftrightarrow (x-y)\left(3x^2+7xy+7y^2\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[3\left(x+\frac{7}{6}y\right)^2+\frac{35}{12}y^2\right]\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le y\\ 3\left(x+\frac{7}{6}y\right)^2+\frac{35}{12}y^2=0\end{array}\right.$$

- $x\le y\Leftrightarrow x\le \dfrac{x}{x+1}\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x<-1\end{array}\right.$
- $3\left(x+\dfrac{7}{6}y\right)^2+\dfrac{35}{12}y^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(-\infty;-1)\cup\{0\}$.

Bài toán 278. Giải bất phương trình $4x^3+\dfrac{5x^2\left(x^2+x+1\right)}{x+1}>9\left(1+\dfrac{x^2}{x+1}\right)^3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$.

Đặt $\dfrac{x^2+x+1}{x+1} = y, y \neq 0$, bất phương trình đã cho trở thành $4x^3+5x^2y > 9y^3 \Leftrightarrow (x-y)\left(4x^2+9xy+9y^2\right) > 0$ [1].

Ta có $4x^2+9xy+9y^2 = 4\left(x+\dfrac{9}{8}y\right)^2 + \dfrac{63}{16}y^2 > 0, \forall y \neq 0$ nên $[1] \Leftrightarrow x > y \Leftrightarrow x > \dfrac{x^2+x+1}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x < -1$.

Bài toán 279. Giải bất phương trình $x^3 + \dfrac{3x^3(x+1)}{x+2} - 4x^3\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3 \leq 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -2$. Đặt $\dfrac{x(x+1)}{x+2} = y$, bất phương trình đã cho trở thành

$$x^3+3x^2y-4y^3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+4xy+4y^2\right) \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+2y)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq y \\ x+2y=0 \end{array}\right.$$

- ✓ $x \leq y \Leftrightarrow x \leq \dfrac{x(x+1)}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow -2 < x \leq 0$.
- ✓ $x+2y=0 \Leftrightarrow x + \dfrac{2x(x+1)}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x(3x+4) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\dfrac{4}{3}; 0\right\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S \in (-2;0]$.

Bài toán 280. Giải bất phương trình $x^3 + \dfrac{2x^2(x-1)}{x+1} + 3x\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 \leq 6\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$. Đặt $\dfrac{x-1}{x+1} = y$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+2x^2y+3xy^2-6y^3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+3xy+6y^2\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[x^2+(x+3y)^2+3y^2\right] \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq y \\ x^2+(x+3y)^2+3y^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq y \\ x=y=0 \end{array}\right.$$

- ➢ $x=y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$ (Loại).
- ➢ $x \leq y \Leftrightarrow x \leq \dfrac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{x^2+1}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow x < -1$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x < -1$.

Bài toán 281. Giải phương trình $x^3 + \dfrac{3x^2(x-1)}{2x-1} + 4x\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)^2 = 8\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq \dfrac{1}{2}$. Đặt $\dfrac{x-1}{2x-1} = y$, biến đổi về $x^3+3x^2y+4xy^2-8y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+4xy+8y^2\right) = 0$.

- $x = y \Leftrightarrow x = \dfrac{x-1}{2x-1} \Leftrightarrow 2x^2-2x+1=0,\;\; \Delta < 0$ nên trường hợp này vô nghiệm.

- $x^2+4xy+8y^2=0 \Leftrightarrow (x+2y)^2+4y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$ (Loại).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 282. Giải bất phương trình $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3+4\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^3 \le 3\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2(x+2)}$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\notin\{-2;-1\}$. Đặt $\dfrac{x}{x+1}=u;\dfrac{x-1}{x+2}=v$, quy về $u^3+4v^3\le 3u^2v \Leftrightarrow (u+v)(u-2v)^2\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2v \\ u+v\le 0 \end{array}\right.$

- $u=2v \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2(x-1)}{x+2} \Leftrightarrow x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow x\in\left\{1+\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right\}$.
- $u+v\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+2x-1}{(x+1)(x+2)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<x\le \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ -1<x\le \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{array}\right.$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left(-2;\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left(-1;\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right]\cup\left\{1-\sqrt{3}\right\}\cup\left\{1+\sqrt{3}\right\}$.

Bài toán 283. Giải bất phương trình $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3+\dfrac{2(x+1)^2}{x+2}>3(x+2)^3$ $\quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\ne -2$. Đặt $\dfrac{x+1}{x+2}=u;x+2=v$, bất phương trình đã cho trở thành

$$u^3+2u^2v>3v^3 \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2+3uv+3v^2\right)>0 \Leftrightarrow (u-v)\left[\left(u+\frac{3}{2}v\right)^2+\frac{3}{4}v^2\right]>0 \quad [*].$$

Nhận thấy $\left(u+\dfrac{3}{2}v\right)^2+\dfrac{3}{4}v^2>0$ do $u=v=0$ không xảy ra. Do đó

$$[*] \Leftrightarrow u-v>0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2}-(x+2)>0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+3}{x+2}<0 \Leftrightarrow \frac{(2x+3)^2+3}{4(x+2)}<0 \Leftrightarrow x<-2.$$

Kết luận bất phương trình ban đầu có nghiệm $x<-2$.

Bài toán 284. Giải phương trình

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)^3+2(x+1)\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)^2+\frac{3(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)}{x+2}=6(x+1)^3 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x\ne -2$.

Đặt $\dfrac{x^2+x+1}{x+2}=a;x+1=b$ ta thu được

$$a^3+2a^2b+3ab^2-6b^3=0 \Leftrightarrow (a-b)\left(a^2+3ab+6b^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a^2+3ab+6b^2=0 \end{array}\right.$$

- $a=b\Leftrightarrow \dfrac{x^2+x+1}{x+2}=x+1\Leftrightarrow x^2+x+1=x^2+3x+2\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.
- $a^2+3ab+6b^2=0\Leftrightarrow \left(a+\dfrac{3}{2}b\right)^2+\dfrac{15}{4}b^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ b=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x+1=0\\ x=-1\end{cases}$ (Loại).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{1}{2}$.

Bài toán 285. Giải bất phương trình $\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^3+\dfrac{3(x+3)^2}{x-1}+5(x+3)(x-1)>9(x-1)^3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 1$.
Đặt $\dfrac{x+3}{x-1}=u; x-1=v$ thì bất phương trình đã cho trở thành

$$u^3+3u^2v+5uv^2-9v^3>0\Leftrightarrow (u-v)(u^2+4uv+9v^2)>0\Leftrightarrow (u-v)\left[(u+2v)^2+5v^2\right]>0 \quad [1].$$

Dễ thấy $(u+2v)^2+5v^2>0$ do $u=v=0$ không xảy ra.

Do đó $[1]\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x-1}>x-1\Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x-2}{x-1}>0\Leftrightarrow x>\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\vee \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}<x<1$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};1\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$.

Nhận xét.
Các bài toán từ 273 đến 283 được giải bằng phép đặt một ẩn phụ không hoàn toàn hoặc hai ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp, nằm trong lớp phương trình – bất phương trình đồng bậc (đẳng cấp) bậc ba. Các bạn chú ý sau khi đặt ẩn phụ u, v chúng ta đưa được về dạng $au^3+bu^2v+cuv^2+dv^3=0$.

- *Xét trường hợp* $v=0$ *có thỏa mãn phương trình ban đầu hay không.*
- *Xét trường hợp* $v\neq 0$, *thực hiện chia hai vế của phương trình cho* $v^3\neq 0$ *thu được*

$$a\left(\frac{u}{v}\right)^3+b\left(\frac{u}{v}\right)^2+c\left(\frac{u}{v}\right)+d=0\Leftrightarrow at^3+bt^2+ct+d=0 \text{ với phép đặt } \frac{u}{v}=t.$$

Các lời giải phía trên đều nhân trả lại hai ẩn u, v hoặc a, b để thao tác trình bày được trở nên ngắn gọn hơn (tất nhiên hàm chứa trong đó là quá trình đặt ẩn t và giải nghiệm). Tùy theo nghiệm của phương trình ẩn t các bạn lựa chọn cách xử lý phù hợp nhất.
Lấy ví dụ điển hình bài toán 269, sau khi đặt ẩn phụ u, v đưa về dạng $u^3+3u^2v+5uv^2-9v^3>0$.
Xét $v=0\Leftrightarrow x=1$ *(Loại).*
Xét $v>0$, *đặt* $u=tv\vee \dfrac{u}{v}=t$ *(hai cách đặt cùng bản chất, điều này tùy theo gu trình bày) ta được*

$$\left[\begin{array}{l}t^3v^3+3t^2v^3+5tv^3-9v^3>0\\ \left(\dfrac{u}{v}\right)^3+3\left(\dfrac{u}{v}\right)^2+5\left(\dfrac{u}{v}\right)-9>0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}v^3\left(t^3+3t^2+5t-9\right)>0\\ t^3+3t^2+5t-9>0\end{array}\right.$$

Tóm lại là luôn có $t^3+3t^2+5t-9>0\Leftrightarrow (t-1)(t^2+4t+9)>0$. *Tiếp tục xét trường hợp* $v<0$, *thực hiện tương tự.*
Nếu chỉ thực hiện thao tác chia ngầm và đưa về nhân tử, ta thu được lời giải bài toán 269, giảm bớt tính toán

$$u^3+3u^2v+5uv^2-9v^3>0\Leftrightarrow (u-v)(u^2+4uv+9v^2)>0\Leftrightarrow (u-v)\left[(u+2v)^2+5v^2\right]>0 \quad [1].$$

Bài toán 286. Giải bất phương trình $x^3+2x^2\left(x^2+x+1\right)-3\left(x^2+x+1\right)^3<0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x^2+x+1=y$ thì bất phương trình đã cho trở thành

$$x^3+2x^2y-3y^3<0\Leftrightarrow(x-y)\left(x^2+3xy+3y^2\right)<0\Leftrightarrow(x-y)\left[\left(x+\frac{3}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right]<0$$

$$\Leftrightarrow x<y\Leftrightarrow x<x^2+x+1\Leftrightarrow x^2>-1 \qquad [*]$$

Do [*] hiển nhiên với $x\in\mathbb{R}$ nên bất phương trình ban đầu có nghiệm $S=\mathbb{R}$.

Bài toán 287. Giải bất phương trình $\left(x^2+1\right)^3+3\left(x^2+1\right)^2(x+2)+\left(x^2+1\right)(x+2)^2-5(x+2)^3\le 0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x^2+1=a;x+2=b,(a>0)$ thì bất phương trình đã cho trở thành

$$a^3+3a^2b+ab^2-5b^3\le 0\Leftrightarrow(a-b)\left(a^2+4ab+5b^2\right)\le 0\Leftrightarrow(a-b)\left[(a+2b)^2+b^2\right]\le 0 \qquad [*].$$

Dễ thấy $a>0\Rightarrow a=b=0$ không xảy ra, hay $(a+2b)^2+b^2>0$.

Do đó $[*]\Leftrightarrow x^2+1\le x+2\Leftrightarrow x^2-x-1\le 0\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Kết luận tập nghiệm $S=\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Bài toán 288. Giải bất phương trình $2\left(x^3+x^2+1\right)^3+3x\left(x^3+x^2+1\right)^2(2x+1)\le 5x^3(2x+1)^3 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $x^3+x^2+1=a;2x^2+x=b$ ta thu được bất phương trình tương đương

$$2a^3+3a^2b-5b^3\le 0\Leftrightarrow(a-b)\left(2a^2+5ab+5b^2\right)\le 0\Leftrightarrow(a-b)\left[2\left(a+\frac{5}{4}b\right)^2+\frac{15}{8}b^2\right]\le 0 \qquad (*).$$

Dễ thấy $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+x^2+1=0\\x(2x+1)=0\end{cases}$ (Loại) nên $2\left(a+\frac{5}{4}b\right)^2+\frac{15}{8}b^2>0$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow a-b\le 0\Leftrightarrow x^3-x^2-x+1\le 0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+1)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x\le -1\end{array}\right.$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(-\infty;-1]\cup\{1\}$.

Bài toán 289. Giải phương trình $x^3+3x\left(x^2-x+1\right)^2-4\left(x^2-x+1\right)^3=0 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Đặt $x^2-x+1=y;y>0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì phương trình đã cho trở thành

$$x^3+3xy^2-4y^3=0\Leftrightarrow(x-y)\left(x^2+xy+4y^2\right)=0\Leftrightarrow(x-y)\left[\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{15}{4}y^2\right]=0.$$

- ✓ $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{15}{4}y^2=0$ (Vô nghiệm do $y>0$).
- ✓ $x=y\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x^3+\dfrac{3x^3}{x+2}-\dfrac{4x^3}{x^3+6x^2+12x+8}>0$.
2. $\left(x^2+1\right)^3+4\left(x^2+1\right)^2(x+1)+\left(x^2+1\right)(x+1)^2\le 6(x+1)^3$.
3. $x^3+3x^2\left(x^2-x+1\right)+2x\left(x^2-x+1\right)^2=6\left(x^2-x+1\right)^3$.
4. $(x+1)^3+3(x+1)^2x+4x^2(x+1)=8(x+1)^3$.
5. $3x^3+\dfrac{7x^2(x+1)}{3x+2}+x\left(\dfrac{x+1}{3x+2}\right)^2-11\left(\dfrac{x+1}{3x+2}\right)^3>0$.
6. $3(x+1)^3+4(x+1)\left(x^2+1\right)^2-7\left(x^2+1\right)^3=0$.
7. $2(x+1)^3+3\left(x^3+1\right)\left(x^2-x+1\right)-5\left(x^2-x+1\right)^3=0$.
8. $(x-1)^3+4\left(x^3-1\right)(x-1)+5\left(x^3-1\right)\left(x^2+x+1\right)-10\left(x^2+x+1\right)^3=0$.
9. $\left(x^2+x+1\right)^3+\left(x^2+x+1\right)^2(x+3)+3\left(x^2+x+1\right)(x+3)^2-5(x+3)^3>0$.
10. $3\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^3+4\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^2(x+2)\ge 7(x+2)^3$.
11. $4\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^3+3\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^2(x+1)+\dfrac{(x+3)(x+1)^2}{x+2}\le 8(x+1)^3$.
12. $4\left(x^2+1\right)^3+5\left(x^2+1\right)^2\left(2x^2+x+1\right)\ge 9\left(2x^2+x+1\right)^3$.
13. $2\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^3+\dfrac{3(x+2)^2}{x+1}+4\left(x^2+3x+2\right)\le 9(x+1)^3$.
14. $x^3+\dfrac{3x^2(x+1)}{x+2}+7x\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2=11\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)^3$.
15. $\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^3+\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^2(x+2)+3\dfrac{(x+3)(x+2)^2}{x+1}\le 5(x+2)^3$.
16. $(x+2)^3+3(x+2)^2\left(x^2+3x+1\right)+4(x+2)\left(x^2+3x+1\right)^2-8\left(x^2+3x+1\right)^3=0$.
17. $\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^3+3\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^2(x+4)-4(x+4)^3=0$.
18. $\left(\dfrac{x+5}{x+1}\right)^3+\dfrac{3(x+5)^2}{x+1}+3(x+1)(x+5)-7(x+5)^3<0$.
19. $(x+3)^3+6(x+1)\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^2-7\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^3<0$.
20. $x^4-\dfrac{x(x+1)^3}{(x+2)^3}+\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^4=0$.
21. $(x+1)^4-\dfrac{8(x+1)(x+2)^3}{(x-2)^3}+9\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^4<0$.

Bài toán 290. Giải phương trình $\frac{x(8-x)}{x+1}\left(x-\frac{x-8}{x+1}\right)=15 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq -1$.
Đặt $x-\frac{x-8}{x+1}=t\Rightarrow t=\frac{x^2+8}{x+1}=-\frac{8x-x^2-8x-8}{x+1}=-\frac{8x-x^2}{x+1}+8\Leftrightarrow\frac{8x-x^2}{x+1}=8-t$. Phương trình trở thành

$$(8-t)t=15\Leftrightarrow(t-3)(t-5)=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+8}{x+1}-3\right)\left(\frac{x^2+8}{x+1}-5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+5\right)\left(x^2-5x+3\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{13}}{2};x=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm như trên.

Bài toán 291. Giải phương trình $\left(2x+\frac{4x-1}{x-1}\right).\frac{2x^2+1}{x-1}=8 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 1$.
Đặt $\frac{2x^2+1}{x-1}=t$. Để ý rằng $2x+\frac{4x-1}{x-1}=\frac{2x^2+2x-1}{x-1}$, suy ra

$$2x+\frac{4x-1}{x-1}-t=\frac{2x^2+2x-1}{x-1}-\frac{2x^2+1}{x-1}=\frac{2x-2}{x-1}=2\Rightarrow 2x+\frac{4x-1}{x-1}=t+2.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$t(t+2)=8\Leftrightarrow(t-2)(t+4)=0\Leftrightarrow\left(\frac{2x^2+1}{x-1}-2\right)\left(\frac{2x^2+1}{x-1}+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2-2x+3\right)\left(2x^2+4x-3\right)=0\Rightarrow x=\frac{-2+\sqrt{10}}{2};x=\frac{-2-\sqrt{10}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 292. Giải phương trình $x(x+2)\left(4+\frac{5}{x-2}\right).\frac{2x+1}{x-2}=5 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.
Điều kiện $x\neq 2$.
Phương trình đã cho trở thành $(x+2).\frac{4x-3}{x-2}.\frac{2x^2+x}{x-2}=6\Leftrightarrow\frac{4x^2+5x-6}{x-2}.\frac{2x^2+x}{x-2}=6 \qquad (1)$.

Đặt $\frac{2x^2+x}{x-2}=t$ thì $\frac{4x^2+5x-6}{x-2}-2t=\frac{4x^2+5x-6}{x-2}-\frac{2(2x^2+x)}{x-2}=\frac{3x-6}{x-2}=3\Rightarrow\frac{4x^2+5x-6}{x-2}=2t+3$. Khi đó

$$t(2t+3)=5\Leftrightarrow(t-1)(2t+5)=0\Leftrightarrow\left(\frac{2x^2+x}{x-2}-1\right)\left(\frac{2x^2+x}{x-2}+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+2\right)\left(2x^2+6x-10\right)=0\Leftrightarrow x^2+3x-5=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{-3+\sqrt{29}}{2};\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận nghiệm $S=\left\{\frac{-3+\sqrt{29}}{2};\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right\}$.

Bài toán 293. Giải phương trình $\dfrac{3x^2+2}{x-3}.\left(9x+\dfrac{28x+3}{x-3}\right)=4 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq 3$.

Để ý rằng $9x+\dfrac{28x+3}{x-3}=\dfrac{9x^2+x+3}{x-3}$, đặt $\dfrac{3x^2+2}{x-3}=t$ thì

$$9x+\frac{28x+3}{x-3}-3t=\frac{9x^2+x+3}{x-3}-\frac{3\left(3x^2+2\right)}{x-3}=\frac{x-3}{x-3}=1\Rightarrow 9x+\frac{28x+3}{x-3}=3t+1.$$

Phương trình đã cho trở thành

$$t\left(3t+1\right)=4\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(3t+4\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{3x^2+2}{x-3}-1\right)\left(\frac{9x^2+6}{x-3}+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(3x^2-x+5\right)\left(9x^2+4x-6\right)=0\Rightarrow x=\frac{-2+2\sqrt{58}}{9};x=\frac{-2-2\sqrt{58}}{9}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm.

Bài toán 294. Giải phương trình $\left(x+\dfrac{3+x-x^2}{2x-1}\right)\left(2x+\dfrac{4x+11}{2x-1}\right)=5 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq\dfrac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương $\dfrac{x^2+3}{2x-1}.\dfrac{4x^2+2x+11}{2x-1}=5$.

Để ý rằng $\dfrac{4x^2+2x+11}{2x-1}-4.\dfrac{x^2+3}{2x-1}=\dfrac{2x-1}{2x-1}=1$ nên đặt $\dfrac{x^2+3}{2x-1}=t\Rightarrow\dfrac{4x^2+2x+11}{2x-1}=4t+1$. Ta thu được

$$t\left(4t+1\right)=5\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(4t+5\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+3}{2x-1}-1\right)\left(\frac{4x^2+12}{2x-1}+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2x+4\right)\left(4x^2+10x+7\right)=0\Leftrightarrow\left[\left(x-1\right)^2+3\right]\left[\left(2x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]=0 \qquad (*)$$

Phương trình (*) vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 295. Giải phương trình $\left(\dfrac{x^2-2}{x+3}+1\right)\left(3x+\dfrac{9-4x}{x+3}\right)=5 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -3$. Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x^2+x+1}{x+3}.\dfrac{3x^2+5x+9}{x+3}=5$.

Để ý rằng $\dfrac{3x^2+5x+9}{x+3}-3.\dfrac{x^2+x+1}{x+3}=\dfrac{2x+6}{x+3}=2$, nếu đặt $\dfrac{x^2+x+1}{x+3}=t\Rightarrow\dfrac{3x^2+5x+9}{x+3}=3t+2$.

Khi đó ta thu được

$$t\left(3t+2\right)=5\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(3t+5\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+x+1}{x+3}-1\right)\left(3.\frac{x^2+x+1}{x+3}+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(3x^2+8x+18\right)=0\Rightarrow x=-\sqrt{2};x=\sqrt{2}$$

So sánh với điều kiện ta thu được hai nghiệm $x=-\sqrt{2};x=\sqrt{2}$.

Bài toán 296. Giải phương trình $\left(x+3-\dfrac{5}{x+1}\right)\left(2x+9-\dfrac{10}{x+1}\right)=5 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -1$. Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x^2+4x-2}{x+1}.\dfrac{2x^2+11x-1}{x+1}=5$.

Ta có $\dfrac{2x^2+11x-1}{x+1}-2.\dfrac{x^2+4x-2}{x+1}=\dfrac{3x+3}{x+1}=3$ nên đặt $\dfrac{x^2+4x-2}{x+1}=t\Rightarrow\dfrac{2x^2+11x-1}{x+1}=2t+3$. Suy ra

$$t\left(2t+3\right)=5\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(2t+5\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+4x-2}{x+1}-2\right)\left(2.\frac{x^2+4x-2}{x+1}+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2x-4\right)\left(2x^2+13x+1\right)=0\Rightarrow x\in\left\{-1+\sqrt{5};-1-\sqrt{5};\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 297. Giải phương trình $\dfrac{x^2+3}{2x+3}\left(1+\dfrac{3x^2+2x+12}{2x+3}\right)=5 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $2x+3\neq 0$. Phương trình đã cho tương đương $\dfrac{x^2+3}{2x+3}.\dfrac{3x^2+4x+15}{2x+3}=5$.

Chú ý rằng $\dfrac{3x^2+4x+15}{2x+3}-3.\dfrac{x^2+3}{2x+3}=\dfrac{4x+6}{2x+3}=2$ nên đặt $\dfrac{x^2+3}{2x+3}=t\Rightarrow\dfrac{3x^2+4x+15}{2x+3}=3t+2$.

Ta thu được phương trình

$$t\left(3t+2\right)=5\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(3t+5\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+3}{2x+3}-1\right)\left(3.\frac{x^2+3}{2x+3}+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-2x\right)\left(3x^2+10x+24\right)=0\Rightarrow x=0;x=2$$

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm $x=0;x=2$.

Bài toán 298. Giải phương trình $\left(x+1-\dfrac{1}{x+2}\right)\left(3x+5+\dfrac{2x+1}{x+2}\right)=7 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -2$. Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}.\dfrac{3x^2+13x+11}{x+2}=7$.

Để ý rằng $\dfrac{3x^2+13x+11}{x+2}-3.\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}=\dfrac{4x+8}{x+2}=4$. Do đó đặt $\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}=t\Rightarrow\dfrac{3x^2+13x+11}{x+2}=4t+3$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t\left(4t+3\right)=7\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(4t+7\right)=0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+3x+1}{x+2}-1\right)\left(4.\frac{x^2+3x+1}{x+2}+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+2x-1\right)\left(4x^2+19x+18\right)=0\Leftrightarrow x=-1+\sqrt{2};x=-1-\sqrt{2};x=\frac{-19+\sqrt{73}}{8};x=\frac{-19-\sqrt{73}}{8}$$

So sánh với điều kiện ta được bốn nghiệm như trên.

Bài toán 299. Giải phương trình $\left(x-3+\dfrac{10}{x+3}\right).\dfrac{5x^2+x+8}{x+3}=22 \qquad \left(x\in\mathbb{R}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -3$. Phương trình đã cho tương đương $\dfrac{x^2+1}{x+3}.\dfrac{5x^2+x+8}{x+3}=22$.

Dễ nhận thấy $\dfrac{5x^2+x+8}{x+3}-5.\dfrac{x^2+1}{x+3}=\dfrac{x+3}{x+3}=1$; đặt $\dfrac{x^2+1}{x+3}=t \Rightarrow \dfrac{5x^2+x+8}{x+3}=5t+1$. Ta thu được

$$t(5t+1)=22 \Leftrightarrow (t-2)(5t+11)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2+1}{x+3}-2\right)\left(5.\frac{x^2+1}{x+3}+11\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2x-1\right)\left(5x^2+11x+38\right)=0 \Rightarrow x=1+\sqrt{2}; x=1-\sqrt{2}$$

Vậy phương trình ban đầu có các nghiệm $x=1+\sqrt{2}; x=1-\sqrt{2}$.

Bài toán 300. Giải phương trình $\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)\left(3x^2+10x+6\right)=3(x+2)^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -2$. Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{x+1}{x+2}.\dfrac{3x^2+10x+9}{(x+2)^2}=2$.

Chú ý rằng $\dfrac{3x^2+10x+9}{(x+2)^2}-\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2=\dfrac{2x^2+8x+8}{(x+2)^2}=2$. Đặt $\dfrac{x+1}{x+2}=t \Rightarrow \dfrac{3x^2+10x+9}{(x+2)^2}=t^2+2$.

Ta thu được $t\left(t^2+2\right)=3 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t^2+t+3=0 \end{array}\right.$

- Phương trình $t^2+t+3=0$ vô nghiệm vì $\Delta=-11<0$.
- $t=1 \Leftrightarrow x+1=x+2 \Leftrightarrow 0x=1$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 301. Giải phương trình $\left(7x^2+22x+19\right)\left(\dfrac{1}{x+1}+1\right)=7(1+x)^2 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$. Phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{7x^2+22x+19}{x^2+2x+1}.\dfrac{x+2}{x+1}=7$.

Để ý rằng $\dfrac{7x^2+22x+19}{x^2+2x+1}-4\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2=\dfrac{3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}=3$ nên nếu đặt $\dfrac{x+2}{x+1}=t \Rightarrow \dfrac{7x^2+22x+19}{x^2+2x+1}=4t^2+3$.

Ta thu được

$$t\left(4t^2+3\right)=7 \Leftrightarrow (t-1)\left(4t^2+4t+7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ (2t+1)^2=-6 \end{array}\right. \Rightarrow x+2=x+1 \Leftrightarrow 0x=1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 302. Giải phương trình $(x+3)\left(13x^2+18x+12\right)=4(1+2x)^3 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+3)\left[\left(x^2+6x+9\right)+3\left(4x^2+4x+1\right)\right]=4(1+2x)^3$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\left[(x+3)^2+3(2x+1)^2\right]=4(1+2x)^3$$

Đặt $x+3=u;2x+1=v$ ta thu được

$$u\left(u^2+3v^2\right)-4v^3=0\Leftrightarrow(u-v)\left(u^2+uv+4v^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u^2+uv+4v^2=0\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $u^2+uv+4v^2=0\Leftrightarrow\left(u+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{15}{4}v^2=0\Leftrightarrow u+\frac{1}{2}v=v=0\Leftrightarrow\begin{cases}u=0\\v=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3=0\\2x+1=0\end{cases}$ (Vô nghiệm).
- $u=v\Leftrightarrow x+3=2x+1\Leftrightarrow x=2$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 303. Giải phương trình $\left(x^2+x+1\right)\left(x^4+2x^3+7x^2+26x+36\right)=5(x+3)^3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(x^2+x+1\right)\left[\left(x^2+x+1\right)^2+4(x+3)^2\right]=5(x+3)^3.$$

Đặt $x^2+x+1=u;x+3=v$ ta thu được

$$u\left(u^2+4v^2\right)=5v^3\Leftrightarrow u^3+4uv^2-5v^3=0\Leftrightarrow(u-v)\left(u^2+5uv+5v^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\u^2+5uv+5v^2=0\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $u^2+5uv+5v^2=0\Leftrightarrow\left(u+\frac{5}{2}v\right)^2+\frac{5}{4}v^2=0\Leftrightarrow u+\frac{5}{2}v=v=0\Leftrightarrow\begin{cases}u=0\\v=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x+1=0\\x+3=0\end{cases}$ (Vô nghiệm).
- $u=v\Leftrightarrow x^2+x+1=x+3\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\sqrt{2};x=-\sqrt{2}$.

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=\sqrt{2};x=-\sqrt{2}$.

Bài toán 304. Giải phương trình $(3+x)\left(3x^4+8x^2+12x+21\right)=5\left(x^2+1\right)^3 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(3+x)\left[3\left(x^4+2x^2+1\right)+2\left(x^2+6x+9\right)\right]=5\left(x^2+1\right)^3$$

$$\Leftrightarrow(3+x)\left[3\left(x^2+1\right)^2+2(x+3)^2\right]=5\left(x^2+1\right)^2$$

Đặt $3+x=u;x^2+1=v$ ta thu được

$$u\left(3v^2+2u^2\right)=5v^3\Leftrightarrow(u-v)\left(2u^2+2uv+5v^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v\\2u^2+2uv+5v^2=0\end{array}\right.$$

Xét hai trường hợp

- $2u^2+2uv+5v^2=0\Leftrightarrow2\left(u+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{9}{2}v^2=0\Leftrightarrow u+\frac{1}{2}v=v=0\Leftrightarrow\begin{cases}u=0\\v=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=-1\\x+3=0\end{cases}$
- $u=v\Leftrightarrow x^2+1=x+3\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=-1;x=2$.

Vậy phương trình đề bài có hai nghiệm $x=-1;x=2$.

Bài tập tương tự.
Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\dfrac{7\left(x^2+5\right)}{4x^2+3x+11}=\dfrac{x-3}{x^2+5}$.
2. $\dfrac{x^2-4}{x+1}=\dfrac{5x+5}{3x^2+2x-10}$.
3. $x\left(3x^2-20x+50\right)=3\left(x-5\right)$.
4. $1-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3\left(x+2\right)^2}{2\left(x+2\right)^2+x^2}$.
5. $\dfrac{x^2+2}{x-3}=\dfrac{3x-9}{x^2+2x-4}$.
6. $\dfrac{x^2+4}{x+1}=\dfrac{5x+5}{3x^2+2x+14}$.
7. $\dfrac{x^2-7}{x+1}=\dfrac{7x+7}{3x^2+4x-17}$.
8. $1+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{3x^2-6x+3}{3x^2-4x+2}$.
9. $\dfrac{7x+14}{x+1}=\dfrac{12x^2+41x+35}{x^2+4x+4}$.
10. $\dfrac{24-3x}{3}>\dfrac{-18x^2+297x-1215}{64-16x+x^2}$.
11. $\dfrac{15}{x+8}=\dfrac{x^2+10x-56}{9}$.
12. $4x+12=\dfrac{-12x^2-76x-119}{x^2+6x+9}$.
13. $\dfrac{39-13x}{2}=\dfrac{-x^2+7x-50}{9-6x+x^2}$.
14. $3-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{\left(x+1\right)^2}{3x^2+3x+1}$.
15. $\dfrac{6+x}{1+x^2}=\dfrac{5\left(x^2+1\right)^2}{3x^4+8x^2+24x+75}$.
16. $\left(x^2+1\right)\left(x^4+7x^2+30x+46\right)=6\left(x+3\right)^2$.
17. $\left(x^2+2\right)\left(2x^4+20x^2+12x+11\right)=5\left(2x+1\right)^2$.
18. $\dfrac{7x+14}{x+4}=\dfrac{4x^2+20x+28}{x^2+4x+4}$.
19. $\dfrac{40}{x-3}=\dfrac{3x^2-18x-5}{8}$.
20. $\dfrac{12x+36}{x-4}=\dfrac{11x^2+10x+127}{x^2+6x+9}$.

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.***
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.***
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. ***Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. ***Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.***
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. ***Toán nâng cao Đại số 10.***
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. ***Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.***
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. ***Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.***
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. ***Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.***
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. ***Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.***
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. ***Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.***
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. ***Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.***
Lê Hồng Đức – Nhóm Cự Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. ***Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.***
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. ***Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.***
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. ***Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.***
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. ***Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.***
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. ***Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).***
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. ***Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 3.***
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. ***Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.***
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. ***Phương pháp giải toán trọng tâm.***
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. ***Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.***
Phan Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. ***Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.***
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.

22. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.***
23. ***Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.***
24. ***Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.***
25. ***Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán*** **(*chính thức – dự bị*)** ***qua các thời kỳ.***
26. ***Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ*** **(*1995 – 2013*).**
27. ***Các tạp chí toán học*****:** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
28. ***Các diễn đàn toán học*****:** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
29. ***Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...***



THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CÁNH YẾU ĐẠI
